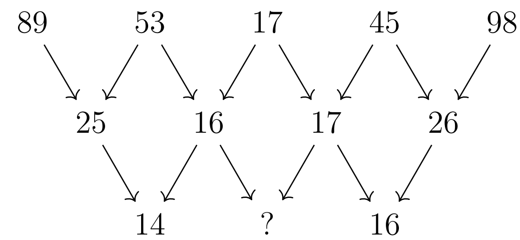
Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
4 класс

1. На картинке изображены три ряда чисел. Каждое число второго ряда получено из двух стоящих над ним чисел первого ряда по определённому правилу. По тому же правилу из чисел второго ряда получены числа третьего ряда. Какое число должно стоять на месте вопросительного знака? (В ответе укажите число и правило, по которому оно получено.)



Ответ: 15=1+6+1+7.

Решение. Сумма четырех цифр, составляющих два числа сверху, равна числу в следующем ряду.

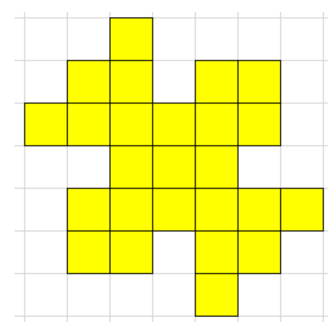
Критерии. Полное решение — 7 баллов. Верный ответ — 2. Правильное описание правила — 5.

2. Чему равно наибольшее четырёхзначное число такое, что если в нём стереть две первых цифры, то получится сумма цифр исходного числа? Обоснуйте свой ответ.

Ответ: 9929.

Решение. Так как сумма пяти цифр не может быть больше 36, то достаточно убедиться, что число не может быть между 9930 и 9936. Это верно, так как максимальная сумма цифр у таких чисел равна 27.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Основная часть оценки (сведение к 9929 - 9936 или эквивалент этой части решения) — 3 балла. Любой способ отсечения чисел 9930-9936 (включая перебор) — 1 балл. Верный ответ — 2 балла.

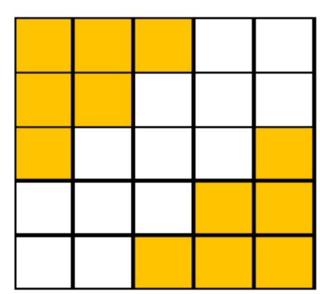


3. Разрежьте картинку на 3 части, из которых можно сложить квадрат.

Решение изображено на картинке. В исходной фигуре нужно развернуть левый верхний и правый нижний углы вместе с выступающими частями.

Критерии. Решение — 7 баллов.

4. У Тимура есть 5 кусков проволоки длины 5 и 7 кусков длины 7. Тимур хочет сложить из них прямоугольник, использовав всю проволоку и согнув (в одном месте) не более одного куска. Сможет ли он это сделать?



Решение. Не сможет. Периметр прямоугольника равен 74, поэтому полупериметр — сумма двух разных сторон — равен 37. Но 37 составляется из пятёрок и семёрок единственным способом ($5\cdot 6+7$), на который у Тимура не хватает коротких кусков. Поэтому на каждой паре сторон прямоугольника Тимуру потребуется согнуть хотя бы один кусок.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Ответ — 1 балл. Идея перехода к полупериметру — еще 1 балл.

5. Костя купил в канцелярском магазине 100 предметов: красные и черные карандаши, красные и синие ластики, черные и синие ручки. Когда Костя пересчитал купленное, он выяснил, что карандашей было не менее 50, ластиков не менее 20, а ручек не менее 25. Кроме того, он выяснил, что красных предметов у него не более 20, а синих и чёрных — поровну. Докажите, что он купил хотя бы 15 синих ручек.

Решение. Предположим противное. Тогда остальные синие предметы — ластики, и их больше 25 (потому что всего синих не менее 40). Это противоречит тому, что есть еще хотя бы 25 ручек и 50 карандашей, а всего 100 покупок.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
5 класс

1. Каждое утро в 9:00 школьный автобус отправляется в школу по маршруту, состоящему из 10 остановок (на маршруте есть только один автобус). Путь между любыми двумя соседними остановками автобус проезжает за 3 минуты, а Петя проходит пешком за 5 минут. Петя в 9:00 пришел на 4-ю остановку. На каждой остановке он может или подождать автобус (и доехать на нем до школы), или идти пешком в сторону школы. В какое время Петя может оказаться в школе? Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Решение. Петя либо пройдет весь путь пешком за $6 \cdot 5 = 30$ минут, либо приедет в школу на автобусе, который приезжает в школу через $9 \cdot 3 = 27$ минут после начала. Следовательно, все возможные ответы это 9:30 и 9:27.

Критерии. Полное решение — 7 баллов Получено 2 или более неправильных ответа — 0 баллов. Получен только ответ 9:30 или только ответ 9:27 — 3 балла. Получены ответы 9:30 и 9:27, но есть один лишний ответ — 4 балла.

2. Сестры Галя и Валя празднуют день рождения в один и тот же день. Пять лет назад, когда Валя была старше Гали в два раза, их кошка родила котёнка. Сейчас сумма возрастов девочек и котёнка равна 30. А сколько лет Гале сейчас?

Решение. Пять лет назад сёстрам было суммарно $30 - 3 \cdot 5 = 15$ лет. Валя была старше Гали в два раза, откуда следует, что Гале было 5 лет, а Вале 10. Значит, сейчас Гале 10 лет.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Правильное решение, но найден не тот ответ (например, найдет возраст Гали 5 лет назад) — 6 баллов. Ответ найден подбором, без доказательства отсутствия других ответов — 2 балла.

3. У Тимура есть 5 кусков проволоки длины 5 и 7 кусков длины 7. Тимур хочет сложить из них прямоугольник, использовав всю проволоку и согнув (в одном месте) не более одного куска. Сможет ли он это сделать?

Решение. Не сможет. Периметр прямоугольника равен 74, поэтому полупериметр — сумма двух разных сторон — равен 37. Но 37 составляется из пятёрок и семёрок единственным способом $(5 \cdot 6 + 7)$, на который у Тимура не хватает коротких кусков. Поэтому на каждой паре сторон прямоугольника Тимуру потребуется согнуть хотя бы один кусок.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

4. Костя купил в канцелярском магазине 100 предметов: красные и черные карандаши, красные и синие ластики, черные и синие ручки. Когда Костя пересчитал купленное, он выяснил, что карандашей было не менее 50, ластиков не менее 20, а ручек не менее 25. Кроме того, он выяснил, что красных предметов у него не более 20, а синих и чёрных — поровну. Докажите, что он купил хотя бы 15 синих ручек.

Решение. Предположим противное. Тогда остальные синие предметы — ластики, и их больше 25 (потому что всего синих не менее 40), — это противоречит тому, что есть еще хотя бы 25 ручек и 50 карандашей, а всего 100 покупок.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. В однокруговом турнире по футболу участвовало 10 команд. За победу давалось 3 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. По окончанию турнира оказалось, что первое место поделили пять команд. Какое наибольшее количество очков могла набрать команда, занявшая последнее место (таких команд тоже могло быть несколько)? Напомним, что в однокруговом турнире каждая команда играет с каждой ровно 1 раз.

Ответ: 12.

Решение. Если бы последняя команда могла набрать 13 очков, то было бы хотя бы 5 команд, набравших не менее 13 (все не победители) и еще пять команд, набравших более 13, — итого все команды в сумме набрали бы не менее 135 очков. Но это теоретически возможный максимум для однокругового турнира на 15 команд, причем такой, при котором нет ничьих — но тогда 13 очков набрать невозможно, так как все набранные очки кратны 3.

Пример для 12 очков строится примерно так: первые 5 команд выиграли «по кругу» друг у друга (2 победы, 2 поражения у каждой), последние 5 команд также выиграли по 2 игры друг у друга, первая пятерка при игре с последней одержала по 3 победы и 2 поражения.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. – Построен пример на 12 — 2 балла. – Доказано, что больше 13 очков не получить — 2 балла. – Доказано, что больше 12 очков не получить — 3 балла.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
6 класс

1. Сестры Галя и Валя празднуют день рождения в один и тот же день. Пять лет назад, когда Валя была старше Гали в два раза, их кошка родила котёнка. Сейчас сумма возрастов девочек и котёнка равна 30. А сколько лет Гале сейчас?

Решение. Пять лет назад сёстрам было суммарно $30 - 3 \cdot 5 = 15$ лет. Валя была старше Гали в два раза, откуда следует, что Гале было 5 лет, а Вале 10. Значит, сейчас Гале 10 лет.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Ошибка в арифметике при верном решении — 6 баллов. Верная суть решения, но забыто, что прошло 5 лет — 2 балла

2. На острове рыцарей и лжецов собрались 20 жителей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы — всегда неправду. Каждому раздали по одной карточке с числами от 1 до 20 (числа на карточках не повторяются). Когда их спросили о числе на карточке, каждый из них назвал число от 1 до 20, а сумма всех ответов составила 156. Какое наименьшее количество лжецов среди них?

Ответ: 3 лжеца.

Решение. Покажем, что три лжеца могло быть. Пусть лжецы получили 18, 19 и 20, а сказали, что у них по 1. Нетрудно понять, что такой пример подходит.

Теперь покажем, что лжецов не может быть менее трёх. Если бы все сказали правду, то сумма чисел была бы $1 + 2 + \dots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$, а она равна 156. Каждый лжец может уменьшить эту сумму не более чем на 19, поэтому как минимум трое лжецов должны быть.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Отсутствие доказательства минимальности лжецов — не более 6 баллов. Забыто, что каждый назвал число от 1 до 20, и из-за этого не верный ответ — не более 5 баллов. Только пример — 3 балла. Верный ответ — 1 балл.

3. У Тимура есть 5 кусков проволоки длины 5 и 7 кусков длины 7. Тимур хочет сложить из них прямоугольник, использовав всю проволоку и согнув (в одном месте) не более одного куска. Сможет ли он это сделать?

Решение. Не сможет. Периметр прямоугольника равен 74, поэтому полупериметр — сумма двух разных сторон — равен 37. Но 37 составляется из пятёрок и семёрок единственным способом $(5 \cdot 6 + 7)$, на который у Тимура не хватает коротких кусков. Поэтому на каждой паре сторон прямоугольника Тимуру потребуется согнуть хотя бы один кусок.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Разбор случаев с целыми сторонами — 3 балла.

4. В клетках таблицы 6×6 записаны числа. За один вопрос можно узнать сумму чисел в любом квадрате, содержащем ровно одну угловую клетку. Как за несколько вопросов узнать сумму чисел в центральной рамке из 12 клеток (т.е. в центральном квадрате 4×4, из центра которого вырезан квадрат 2×2?

Решение. Узнаем сумму чисел в квадратах 4×4 и 3×3, который прилегает к левому верхнему углу. Вычтем из первой вторую — получим сумму чисел в «уголке». Аналогично найдём сумму в противоположном «уголке» (квадраты должны прилегать к правому нижнему углу). Сложим суммы в этих двух «уголках». Теперь вычтем четыре суммы в квадратах 2×2, примыкающих к разным углам. Наконец, для нужной рамки осталось добавить суммы угловых клеток, а это квадраты 1×1.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Найдена сумма чисел в центральном квадрате 4×4 — 2 балла.

5. Назовем целое число *счастливым*, если его цифры можно разделить на две группы так, чтобы сумма цифр в каждой группе была одинаковой. Например, 34175 — счастливое, потому что $3 + 7 = 4 + 1 + 5$. Найдите наименьшее четырехзначное счастливое число, соседнее с которым также является счастливым числом.

Ответ: 1449.

Решение. Очевидно, что 1449 подходит $(1 + 4 + 4 = 9,\ 1 + 4 = 5 + 0)$.

Докажем, что это число является минимальным. Заметим, что у счастливого числа сумма цифр должна быть чётной. Чтобы у соседнего числа сумма цифр была тоже чётной, эти числа должны оканчиваться на 9 и 0 (иначе суммы цифр отличаются на 1). А значит, у искомого числа сумма цифр в каждой группе должна быть не менее 9. Переберём такие числа (с чётной суммой цифр не менее 18, оканчивающихся на 9), начиная с самых маленьких: 1089, 1179, 1199, 1269, 1289, 1359, 1379, 1399, 1449. Нетрудно видеть, что все числа, меньшие 1449, не подойдут.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Верный ответ — 1 балл.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
7 класс

1. На острове рыцарей и лжецов собрались 20 жителей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы — всегда неправду. Каждому раздали по одной карточке с числами от 1 до 20. Когда их спросили о числе на карточке, каждый из них назвал число от 1 до 20, а сумма всех ответов составила 156. Какое наименьшее количество лжецов среди них? **Ответ:** 3 лжеца.

Решение. Покажем, что три лжеца могло быть. Пусть лжецы получили 18, 19 и 20, а сказали, что у них по 1. Нетрудно понять, что такой пример подходит.

Теперь покажем, что лжецов не может быть менее трёх. Если бы все сказали правду, то сумма чисел была бы $1 + 2 + \cdots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210$, а она равна 156. Каждый лжец может уменьшить эту сумму не более чем на 19, поэтому как минимум трое лжецов должны быть.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Показано, что в случае всех рыцарей сумма чисел должна быть 210 — 2 балла.

2. Никодим и Поликарп купили себе одну колоду из 52 игральных карт и клеят их на обои, по очереди, по одной карте. Первым ходит Никодим. Тот, после чьего хода на стене окажется четыре карты одной масти или четыре карты последовательного (например, 8-9-10-валет) достоинства, проиграл. (За тузом двойка не идёт.) Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от действий соперника?

Ответ: второй.

Решение. Пусть второй берёт карту того же цвета и достоинства, что и первый (т.е., например, если первый приклеил пиковую даму, то второй клеит крестовую даму). Ясно, что второй не проиграет (иначе бы предыдущим ходом сложилась проигрышная комбинация у первого). Но игра не может длиться более 12 ходов (после тринадцатого хода точно образуются четыре карты одной масти), а значит, проиграет первый.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Описание верной стратегии, без доказательства — 4 балла. Стратегия, которая учитывает только масти — не более 3 баллов.

3. НОД двух чисел равен 40!. А их НОК равен 45!. Сколькими способами можно выбрать такие числа?

Напомним, что через $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Ответ: $2^7 = 128$ способов (или 64, если мы считаем, что способы (a, b) и (b, a) одинаковые).

Решение. Пусть первое число равно $40! \cdot x$, второе — $40! \cdot y$, где $xy = 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 43$. Кроме того, числа x и y должны быть взаимно простыми, т.е. каждый из семи простых множителей, входящих в разложении xy, должен целиком лежать либо в x, либо в y. Отсюда получаем 2^7 вариантов. Если мы не различаем, какое из чисел первое, а какое второе, то ответ будет $2^6 = 64$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Ответ, без решения — 0 баллов. Получено число в виде $41 \cdot 43 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^3 \cdot 2^3$ — 3 балла. Обоснованный ответ 2^{11} (ошибка в распределении по множителям двоек и троек) — 4 балла.

4. На полях a1, a2, b1, c4, d3, d4 доски 4×4 стоят шесть белых коней, а на полях a3, a4, b4, c1, d1, d2 — черные. Хватит ли 20 ходов для перестановки чёрных и белых коней местами?

Решение. Такое сделать можно, последовательность ходов приведена ниже. d2–b3, c4–d2, a3–c4, a4–c3, b2–a4, d1–b2, a1–c2, c2–a3, b3–a1, b4–c2, d3–b4, b2–d3, d4–b3, c2–d4, c3–d1, d1–b2, a2–c3, c3–d1, c1–a2, b3–c1.

Критерии. Верное решение — 7 баллов.

5. В бесконечной большой пещере у буддистских монахов написан какой-то конечный набор простых, не обязательно различных, чисел. Каждую секунду один из монахов делает одно из двух следующих действий.

1. Прибавляет к какому-то чисел его цифру.
2. Переставляет в числе цифры.

В ходе каждой операции монах стирает старое число и пишет новое, причём новое обязательно должно быть строго больше стёртого. Если в пещере окажется написанным составное число, то мир схлопнется во вселенское ничто. Могут ли монахи действовать так, чтобы мир существовал бесконечно долго?

Решение. Заметим, что все числа, с которыми можно что-то делать в пещере, нечётны, и прибавлять к ним можно только чётную цифру.

Пусть было бы число, которое мы можем бесконечно долго изменять. Это означает, что через какое-то время оно придет к виду $10000...0x$, где — какая-то нечётная цифра. Но такое число нельзя изменить. То есть каждое число в пещере либо придет к числу такого вида, либо же перестанет меняться раньше.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Любое решение с примером ситуации, когда монахи закончат процесс — 0 баллов. Доказано, что последняя цифра должна быть нечётной — 1-2 балла, в зависимости от аккуратности.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
8 класс

1. Точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от середин его сторон. Докажите, что треугольник равносторонний.

Решение. ABC — треугольник, G — точка пересечения биссектрис, M, N, K — середины AB, BC, CA соответственно, X, Y, Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки G на стороны AB, BC, CA соответственно. По условию $GM = GN = GK$, кроме того $GX = GY = GZ$, $AX = AZ$, $BX = BY$, $CY = CZ$, так как G — точка пересечения биссектрис. Поэтому треугольники GMX, GNY, GKZ равны по гипотенузе и катету.

1) Предположим, что $AM < AX$ и $AK < AZ$. Тогда $AM = AX - XM = AZ - ZK = AK \Rightarrow AB = 2AM = 2AK = AC \Rightarrow$ треугольник ABC равнобедренный с основанием $BC \Rightarrow N = Y \Rightarrow 0 = YN = XM = ZK \Rightarrow$ все биссектрисы совпадают с медианами $\Rightarrow$ ABC равносторонний.

2) Предположим, что $AM > AX$ и $AK > AZ$. Тогда $AM = AX + XM = AZ + ZK = AK$. Далее аналогично.

3) Предположим, что $AM < AX$, $BN < BY$, $CK < CZ$. Тогда $AM = BM = BX + XM = BY + YN > BY - YN = BN$, то есть $AB > BC$. Далее по кругу: $BC > CA$ и $CA > AB$. Противоречие.

4) Предположим, что $AM > AX$, $BN > BY$, $CK > CZ$. Аналогично (3).

Критерии. Полное решение — 5 баллов. Разобран только (1) или (2) случаи — 2 балла. Разобраны и (1) и (2) случаи — 3 балла.

2. НОД двух чисел равен 40!. А их НОК равен 45!. Сколькими способами можно выбрать такие числа?

Напомним, что символом $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Ответ: $2^7 = 128$ способов (или 64, если мы считаем, что способы (a, b) и (b, a) одинаковые).

Решение. Пусть первое число равно $40! \cdot x$, второе — $40! \cdot y$, где $xy = 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 43$. Кроме того, числа x и y должны быть взаимно простыми, т.е. каждый из семи простых множителей, входящих в разложении xy, должен целиком лежать либо в x, либо в y. Отсюда получаем 2^7 вариантов. Если мы не различаем, какое из чисел первое, а какое второе, то ответ будет $2^6 = 64$.

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

3. Пусть действительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 2022$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$[3x] + [4y] + [5z].$$

Квадратными скобками обозначается целая часть числа. Целой частью числа называется наибольшее целое число, которое не превосходит данное число. Так, например, $[4.7] = 4$, $[\frac{7}{3}] = 2$, $[-1.5] = -2$, $[5] = 5$.

Комментарий. С этой задачей произошла накладка. Изначально предполагалось, что числа x, y, z неотрицательны. К сожалению, в окончательной версии условие неотрицательности чисел исчезло. Приведём два решения — в одном числа предполагаются неотрицательными, в другом нет.

Ответ: $3 \cdot 2020 + 4 = 3 \cdot 2021 + 1$, если числа предполагаются неотрицательными, $-\infty$, если произвольными.

Решение для случая произвольных x, y, z. В этом случае наименьшего значения у этого выражения не существует. Предположим, что существует A такое, что $[3x] + [4y] + [5z] \geqslant A$ для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $x = 4 \cdot 2022 - B$, $y = B - 3 \cdot 2022$, $z = 0$, где B — любое целое меньшее A. Тогда $x + y + z = 4 \cdot 2022 - B + B - 3 \cdot 2022 + 0 = 2022$, $[3x] + [4y] + [5z] = 3\,x + 4\,y = 3 \cdot 2022 + y = 3 \cdot 2022 + B - 3 \cdot 2022 = B < A$. Противоречие.

Решение для случая $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Пусть $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, $z = w + \gamma$, где $u = [x]$, $v = [y]$, $w = [z]$. Тогда $\alpha, \beta, \gamma \in [0; 1)$. Так как $x + y + z \in \mathbb{Z}$, то $\alpha + \beta + \gamma \in \{0, 1, 2\}$.

1) Предположим, что $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то есть $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Тогда $[3x] + [4y] + [5z] = 3\,x + 4\,y + 5\,z = 3 \cdot 2022 + y + 2\,z \geqslant 3 \cdot 2022$. Значение $3 \cdot 2022$ достигается при $x = 2022$, $y = z = 0$.

2) Предположим, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Тогда

$$[3x] + [4y] + [5z] = 3\,u + 4\,v + 5\,w + [3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma] =$$

$$= 3 \cdot 2021 + 4\,v + 5\,w + [3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma] \geqslant$$
$$\geqslant 3 \cdot 2021 + [3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma].$$

Осталось понять, какое наименьшее значение принимает выражение $[3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma]$. Предположим, что $[3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma] = 0$. Тогда $3\,\alpha] = [4\,\beta] = [5\,\gamma] = 0$ и $\alpha < \frac{1}{3}$, $\beta < \frac{1}{4}$, $\gamma < \frac{1}{5}$. Тогда

$$1 = \alpha + \beta + \gamma < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} < 1.$$

Противоречие. Следовательно, $[3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma] \geqslant 1$. При $\alpha = \frac{2}{3} - \frac{1}{20}$, $\beta = \frac{1}{4} - \frac{1}{20}$, $\gamma = \frac{1}{5} - \frac{1}{60}$ достигается равенство 1.

Итак, в случае (2) выражение $[3x] + [4y] + [5z]$ принимает наименьшее значение $3 \cdot 2021 + 1$.

3) Пусть $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Тогда

$$[3x] + [4y] + [5z] \geqslant 3 \cdot 2020 + [3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma].$$

Пусть $[3\,\alpha] = a$, $[4\,\beta] = b$, $[5\,\gamma] = c$. Предположим, что $a+b+c \leqslant 3$. Тогда $2 = \alpha+\beta+\gamma < \frac{a+1}{3} + \frac{b+1}{4} + \frac{c+1}{5} \leqslant \frac{3}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{17}{10} < 2$. Противоречие. Следовательно, $[3\,\alpha] + [4\,\beta] + [5\,\gamma] \geqslant 4$.

Критерии. 1) Полное решение в предположении, что $x, y, z \in \mathbb{R}$ — 4 балла. Если нет конкретной конструкции как получить значение выражения меньше любого заданного, то — 0 баллов. Рассуждения вроде «это очевидно» не принимаются.

2) Полное решение для случая $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ — 4 балла. Если разобраны два из трёх случаев для суммы $\alpha + \beta + \gamma$ — 2 балла. Если разобран только один случай, то 0 баллов. Если нет примера достижения оценки — минус один балл.

4. Отрезок натурального ряда назовем *интересным*, если произведение двух каких-то чисел из этого отрезка равно сумме всех остальных. Например, отрезок $[2; 6]$ интересный, потому что $2 \cdot 6 = 3 + 4 + 5$. Докажите, что интересных отрезков бесконечно много.

Решение. Любой отрезок $[2; 2k]$ интересен, потому что произведение $2k$ на $k-1$ равно сумме остальных чисел отрезка. Доказательство: $2\,k\,(k-1) = 2\,k\,(2k+1)/2 - 1 - 2k - (k-1)$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. 2022 точки делят окружность на равные части. Два игрока по очереди вписывают в окружность правильные многоугольники так, чтобы вершины многоугольника попадали на отмеченные точки, но не попадали в точки, уже занятые другими многоугольниками. Вписывать 2022-угольник нельзя. Проигрывает тот игрок, кто не может сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

Ответ: выигрывает первый.

Решение 1. Заметим, что $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ и пронумеруем отмеченные точки от 0 до 2021. Первый своим первым ходом рисует шестиугольник в вершинах $A_1 = 0$, $A_2 = 337$, $\ldots A_6 = 337 \cdot 5$, то есть $A_i \equiv 0 \mod 337$. После этого уже нельзя нарисовать ни один $(k \cdot 337)$-угольник. Действительно. Если можно нарисовать $(k \cdot 337)$-угольник, то можно нарисовать и 337-угольник. Тогда вершины этого многоугольника имеют номера $B_1 = 6 \cdot 0 + r$, $B_2 = 6 \cdot 1 + r$, $\ldots$, $B_{337} = 6 \cdot 336 + r$. Так как 6 и 337 взаимно просты, то среди B_i нет чисел, которые дают одинаковые остатки при делении на 337. Следовательно, существует вершина B_i такая, что $B_i \equiv 0 \mod 337$. Эта вершина совпадёт с одной из вершин первого многоугольника $A_1 \ldots A_6$.

Значит, теперь можно рисовать только шестиугольники или треугольники. Для шестиугольников вершины будут иметь вид $C_k = 337 \cdot k + r$, где $r \in \{0, \ldots, 336\}$, а для треугольников — $D_k = 2 \cdot 337 \cdot k + r$ или $D_k = 337 + 2 \cdot 337 \cdot k + r$, где $r \in \{0, \ldots, 336\}$. Другими словами все вершины многоугольника будут давать одинаковый остаток при делении на 337. При этом остаток 0 уже занят первым шестиугольником.

Первый игрок может разбить оставшиеся 336 остатков на пары остатков. Если второй игрок нарисует многоугольник вершины которого при делении на 337 дают остаток r, то первый игрок всегда сможет нарисовать такой же многоугольник, но вершины которого дают парный к r остаток.

Решение 2. Первый своим первым ходом рисует шестиугольник. Затем он выбирает одну из диагоналей AB этого шестиугольника все свои следующие ходы делает симметрично ходам второго относительно этой диагонали. Докажем, что первый всегда может сделать ход. Предположим противное: второй игрок нарисовал многоугольник M так, что первый не может сделать ход. Перед ходом второго все занятые отмеченные точки симметричны относительно AB. Так как после хода второго первый не может сделать ход, то после этого хода появилась новая симметричная пара занятых точек: X и Y. Точки X и Y являются вершинами M. Поэтому многоугольник M симметричен относительно AB. Будем считать, что X и Y — ближайшие к A из всех вершин M. Тогда XY это сторона многоугольника M, а дуга XY состоит из чётного числа частей окружности. Так как $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, то многоугольник M может иметь либо $2022/2 = 1011$, либо $2022/6 = 337$, либо $2022/(2 \cdot 337) = 3$ вершины. Во всех случаях это нечётное число. Поэтому вершина B должна принадлежать многоугольнику M. Противоречие.

Критерии. Любой из вариантов полного решения — 8 баллов.

1) Если сказано, что первый ход — шестиугольник, далее ходим симметрично относительно диагонали, но не доказано, что у первого всегда будет ход — 2 балла.

2) Если сказано, что ходим симметрично, но не относительно диагонали, а относительно серединного перпендикуляра к стороне шестиугольника — 0 баллов.

3) Если в первом решении упомянуто, что $(k \cdot 337)$-угольник, но это не доказано — дыра в 3 балла.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
9 класс

1. Вася подошел к очереди, в которой стоит 100 человек, и встал в ее хвост. Он умеет уговаривать троих человек пропустить его за 2 рубля, и пятерых человек за 3 рубля. В очереди стоит принципиальная бабка Алевтина (не в первом и не в последнем десятке), которую нужно убеждать отдельно за 50 рублей, и которая не может входить в состав группы. Какой суммы Васе гарантированно хватит для того, чтобы встать в очереди первым?

Ответ: 111 рублей.

Решение. Заметим, что уговаривать пятерых выгоднее, чем троих. Следовательно, нам нужно сделать как можно больше пятёрок. Кроме Алевтины, очередь состоит из 99 человек, а значит, троек должно быть 3, 8, 13 и т.д.

Если Алевтина стоит на месте $5k$, то можно сделать три тройки до неё (остальные разобьются на пятёрки).

Если Алевтина стоит на месте $5k+1$, то можно сделать три тройки после неё, и все остальные также разобьются на пятёрки.

Если место Алевтины — $5k+2$, то можно сделать две тройки до и одну — после неё.

Если место Алевтины — $5k+4$, то можно сделать одну тройку до и две — после неё.

Но если Алевтина стоит на месте вида $5k+3$, то придётся делать восемь троек — 4 до неё и 4 после неё. В этом случае сумма составит $8 \cdot 2 + 3 \cdot 15 + 50 = 111$ рублей. Это и есть ответ к задаче.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Верный ответ — 2 балла. Без обоснования утверждается, что максимум будет, если Алевтина стоит на месте, дающем остаток 3 при делении на 5 — не более 5 баллов.

2. НОД двух чисел равен 40! А их НОК равен 45!. Сколькими способами можно выбрать такие числа?

Напомним, что символом $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Ответ: $2^7 = 128$ способов (или 64, если мы считаем, что способы (a, b) и (b, a) одинаковые).

Решение. Пусть первое число равно $40! \cdot x$, второе — $40! \cdot y$, где $xy = 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 43$. Кроме того, числа x и y должны быть взаимно простыми, т.е. каждый из семи простых множителей, входящих в разложении xy, должен целиком лежать либо в x, либо в y. Отсюда получаем 2^7 вариантов. Если мы не различаем, какое из чисел первое, а какое второе, то ответ будет $2^6 = 64$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Сформулирован верный принцип поиска таких чисел, но неверно сосчитано количество вариантов — от 4 до 6 баллов.

3. В треугольнике ABC угол A равен $77°$, угол B равен $58°$, M — середина BC, P — основание высоты на BC, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что O, M и P — три из четырёх вершин некоторого квадрата.

Решение. Заметим, что $\angle PAB = 32°$, тогда $\angle PAC = 45°$ и $\angle PCA = 45°$. Но тогда серединный перпендикуляр к AC является биссектрисой угла APC, а на нём лежит точка O. Из этого непосредственно вытекает утверждение задачи.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

4. Отрезок натурального ряда назовем *интересным*, если произведение двух каких-то чисел из этого отрезка равно сумме всех остальных. Например, отрезок $[2; 6]$ интересный, потому что $2 \cdot 6 = 3 + 4 + 5$. Докажите, что интересных отрезков бесконечно много.

Решение. Любой отрезок $[2; 2k]$ интересен, потому что произведение $2k$ на $k-1$ равно сумме остальных чисел отрезка. Доказательство: $2\,k\,(k-1) = 2\,k\,(2k+1)/2 - 1 - 2k - (k-1)$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Даны 30 различных натуральных чисел. Вася выписал в тетрадочку всевозможные их попарные суммы. Получилось 435 сумм. Оказалось, что среди этих сумм ровно 230 делятся на 3. А сколько чисел среди изначальных кратно 3?

Ответ: 21.

Решение. Пусть a — количество чисел, кратных трём, b — количество чисел, дающих остаток 1 при делении на 3, c — количество чисел, дающих остаток 2 при делении на 3. Заметим, что количество сумм, кратных трём, равно $\frac{a(a-1)}{2} + bc$. При любом конкретном a количество попарных сумм, кратных 3, максимально, если числа b и c максимально близки (т.е. равны или отличаются на 1). В самом деле, при каждом конкретном a функция $f(b) = \frac{a(a-1)}{2} + b(30 - a - b)$ является параболой с максимумом в точке $\frac{30-a}{2}$.

При $a = 21$ максимальное количество сумм, кратных 3, равно 210+20=230. А при $a \geq 21$ таких сумм уже не меньше, чем $\frac{22\cdot 21}{2} = 231$.

Осталось показать, что при $a < 21$ мы получим заведомо меньшее количество сумм, кратных 3. Для этого исследуем параболу $g(a) = \frac{a(a-1)}{2} + \frac{(30-a)^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 - \frac{31}{2}a + 225$ (слагаемое bc мы заменили на максимально возможное значение, достигающееся при $b = c = \frac{30-a}{2}$). Парабола $g(a)$ имеет вершину в точке $a = 31/3$, а значит, на промежутке $[0, 20]$ принимает максимальное значение при $a = 0$, и это значение равно 225, что меньше 230.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Показано, что 21 число могло быть — 2 балла.

Не доказано, почему чисел, кратных трём, не может быть больше 21 — не более 5 баллов.

Не доказано, почему чисел, кратных трём, не может быть меньше 21 — не более 4 баллов.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
10 класс

1. Пусть неотрицательные числа x, y, z таковы, что $x+y+z=2022$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $[3x]+[4y]+[5z]$.

Квадратными скобками обозначается целая часть числа. Целой частью числа называется наибольшее целое число, которое не превосходит данное число. Так, например, $[4.7]=4$, $[\frac{7}{3}]=2$, $[-1.5]=-2$, $[5]=5$.

Комментарий. С этой задачей произошла накладка. Изначально предполагалось, что числа x, y, z неотрицательны. К сожалению, в окончательной версии условие неотрицательности чисел исчезло. Приведём два решения — в одном числа предполагаются неотрицательными, в другом нет.

Ответ: $3\cdot 2020+4=3\cdot 2021+1=6064$, если числа предполагаются неотрицательными, $-\infty$, если произвольными.

Решение для случая произвольных x, y, z. В этом случае наименьшего значения у этого выражения не существует. Предположим, что существует A такое, что $[3x]+[4y]+[5z]\geqslant A$ для всех $x,y,z\in\mathbb{R}$. Рассмотрим $x=4\cdot 2022-B$, $y=B-3\cdot 2022$, $z=0$, где B — любое целое меньшее A. Тогда $x+y+z=4\cdot 2022-B+B-3\cdot 2022+0=2022$, $[3x]+[4y]+[5z]=3\,x+4\,y=3\cdot 2022+y=3\cdot 2022+B-3\cdot 2022=B<A$. Противоречие.

Решение для случая $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$. Пусть $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, $z=w+\gamma$, где $u=[x]$, $v=[y]$, $w=[z]$. Тогда $\alpha,\beta,\gamma\in[0;1)$. Так как $x+y+z\in\mathbb{Z}$, то $\alpha+\beta+\gamma\in\{0,1,2\}$.

1) Предположим, что $\alpha+\beta+\gamma=0$, то есть $x,y,z\in\mathbb{Z}$. Тогда $[3x]+[4y]+[5z]=3\,x+4\,y+5\,z=3\cdot 2022+y+2\,z\geqslant 3\cdot 2022$. Значение $3\cdot 2022$ достигается при $x=2022$, $y=z=0$.

2) Предположим, что $\alpha+\beta+\gamma=1$. Тогда

$$[3x]+[4y]+[5z]=3\,u+4\,v+5\,w+[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma]=$$

$$=3\cdot 2021+4\,v+5\,w+[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma]\geqslant$$

$$\geqslant 3\cdot 2021+[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma].$$

Осталось понять, какое наименьшее значение принимает выражение $[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma]$. Предположим, что $[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma]=0$. Тогда $3\,\alpha]=[4\,\beta]=[5\,\gamma]=0$ и $\alpha<\frac{1}{3}$, $\beta<\frac{1}{4}$, $\gamma<\frac{1}{5}$. Тогда

$$1=\alpha+\beta+\gamma<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}<1.$$

Противоречие. Следовательно, $[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma]\geqslant 1$. При $\alpha=\frac{2}{3}-\frac{1}{20}$, $\beta=\frac{1}{4}-\frac{1}{20}$, $\gamma=\frac{1}{5}-\frac{1}{60}$ достигается равенство 1.

Итак, в случае (2) выражение $[3x]+[4y]+[5z]$ принимает наименьшее значение $3\cdot 2021+1$.

3) Пусть $\alpha+\beta+\gamma=2$. Тогда

$$[3x]+[4y]+[5z]\geqslant 3\cdot 2020+[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma].$$

Пусть $[3\,\alpha]=a$, $[4\,\beta]=b$, $[5\,\gamma]=c$. Предположим, что $a+b+c\leqslant 3$. Тогда $2=\alpha+\beta+\gamma<\frac{a+1}{3}+\frac{b+1}{4}+\frac{c+1}{5}\leqslant\frac{3}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{17}{10}<2$. Противоречие. Следовательно, $[3\,\alpha]+[4\,\beta]+[5\,\gamma]\geqslant 4$.

Критерии. 1) Полное решение — 7 баллов. Приведен пример на 6064 — 2 балла.

2. В треугольнике ABC угол A равен 77°, угол B равен 58°, M — середина BC, P — основание высоты на BC, O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что O, M и P — три из четырёх вершин некоторого квадрата.

Решение. Заметим, что $\angle PAB=32^\circ$, тогда $\angle PAC=45^\circ$ и $\angle PCA=45^\circ$. Но тогда серединный перпендикуляр к AC является биссектрисой угла APC, а на нём лежит точка O. Из этого непосредственно вытекает утверждение задачи.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Доказана равнобедренность треугольника APC — 2 балла

3. 2022 точки делят окружность на равные части. Два игрока по очереди вписывают в окружность правильные многоугольники так, чтобы вершины многоугольника попадали на отмеченные точки, но не попадали в точки, уже занятые другими многоугольниками. Вписывать 2022-угольник нельзя. Проигрывает тот игрок, кто не может сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

Ответ: выигрывает первый.

Решение 1. Заметим, что $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ и пронумеруем отмеченные точки от 0 до 2021. Первый своим первым ходом рисует шестиугольник в вершинах $A_1 = 0$, $A_2 = 337$, $\ldots A_6 = 337 \cdot 5$, то есть $A_i \equiv 0 \mod 337$. После этого уже нельзя нарисовать ни один $(k \cdot 337)$-угольник. Действительно. Если можно нарисовать $(k \cdot 337)$-угольник, то можно нарисовать и 337-угольник. Тогда вершины этого многоугольника имеют номера $B_1 = 6 \cdot 0 + r$, $B_2 = 6 \cdot 1 + r$, $\ldots$, $B_{337} = 6 \cdot 336 + r$. Так как 6 и 337 взаимно просты, то среди B_i нет чисел, которые дают одинаковые остатки при делении на 337. Следовательно, существует вершина B_i такая, что $B_i \equiv 0 \mod 337$. Эта вершина совпадёт с одной из вершин первого многоугольника $A_1 \ldots A_6$.

Значит, теперь можно рисовать только шестиугольники или треугольники. Для шестиугольников вершины будут иметь вид $C_k = 337 \cdot k + r$, где $r \in \{0, \ldots, 336\}$, а для треугольников — $D_k = 2 \cdot 337 \cdot k + r$ или $D_k = 337 + 2 \cdot 337 \cdot k + r$, где $r \in \{0, \ldots, 336\}$. Другими словами все вершины многоугольника будут давать одинаковый остаток при делении на 337. При этом остаток 0 уже занят первым шестиугольником.

Первый игрок может разбить оставшиеся 336 остатков на пары остатков. Если второй игрок нарисует многоугольник вершины которого при делении на 337 дают остаток r, то первый игрок всегда сможет нарисовать такой же многоугольник, но вершины которого дают парный к r остаток.

Решение 2. Первый своим первым ходом рисует шестиугольник. Затем он выбирает одну из диагоналей AB этого шестиугольника все свои следующие ходы делает симметрично ходам второго относительно этой диагонали. Докажем, что первый всегда может сделать ход. Предположим противное: второй игрок нарисовал многоугольник M так, что первый не может сделать ход. Перед ходом второго все занятые отмеченные точки симметричны относительно AB. Так как после хода второго первый не может сделать ход, то после этого хода появилась новая симметричная пара занятых точек: X и Y. Точки X и Y являются вершинами M. Поэтому многоугольник M симметричен относительно AB. Будем считать, что X и Y — ближайшие к A из всех вершин M. Тогда XY это сторона многоугольника M, а дуга XY состоит из чётного числа частей окружности. Так как $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, то многоугольник M может иметь либо $2022/2 = 1011$, либо $2022/6 = 337$, либо $2022/(2 \cdot 337) = 3$ вершины. Во всех случаях это нечётное число. Поэтому вершина B должна принадлежать многоугольнику M. Противоречие.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Написано, что первым ходом нужно вписать 674-угольник — 1 балл. Забыт или неправильно разобран один случай — не более 5 баллов.

4. Даны 30 различных натуральных чисел. Вася выписал в тетрадочку всевозможные их попарные суммы. Получилось 435 сумм. Оказалось, что среди этих сумм ровно 230 делятся на 3. А сколько чисел среди изначальных кратно 3?

Ответ: 21.

Решение. Пусть a — количество чисел, кратных трём, b — количество чисел, дающих остаток 1 при делении на 3, c — количество чисел, дающих остаток 2 при делении на 3. Заметим, что количество сумм, кратных трём, равно $\frac{a(a-1)}{2} + bc$. При любом конкретном a количество попарных сумм, кратных 3, максимально, если числа b и c максимально близки (т.е. равны или отличаются на 1). В самом деле, при каждом конкретном a функция $f(b) = \frac{a(a-1)}{2} + b(30 - a - b)$ является параболой с максимумом в точке $\frac{30-a}{2}$.

При $a = 21$ максимальное количество сумм, кратных 3, равно 210+20=230. А при $a \geq 21$ таких сумм уже не меньше, чем $\frac{22 \cdot 21}{2} = 231$.

Осталось показать, что при $a < 21$ мы получим заведомо меньшее количество сумм, кратных 3. Для этого исследуем параболу $g(a) = \frac{a(a-1)}{2} + \frac{(30-a)^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 - \frac{31}{2}a + 225$ (слагаемое bc мы заменили на максимально возможное значение, достигающееся при $b = c = \frac{30-a}{2}$). Парабола $g(a)$ имеет вершину в точке $a = 31/3$, а значит, на промежутке $[0, 20]$ принимает максимальное значение при $a = 0$, и это значение равно 225, что меньше 230.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Описание примера на 21 число — 1 балл

5. Докажите, что для любой параболы найдётся бесконечно много равносторонних треугольников, все вершины которых лежат на ней.

Решение. Не умаляя общности будем считать, что парабола смотрит «рогами» вверх. Рассмотрим произвольную точку X на параболе и проведем из нее два луча под углом $60°$ так, что один луч смотрит вверх, а второй внутрь параболы. Теперь будем эти лучи поворачивать, так чтобы они смотрели в разные стороны относительно вертикального луча из X. После поворота оба луча пересекают параболу, так как квадратичная функция растет быстрее любой линейной; обозначим точки пересечения $Y(t)$ и $Z(t)$. До тех пор пока второй луч не станет вертикальным либо пока первый не выйдет за параболу, обе точки определены. В более ранний из вышеописанных моментов отрезок $XY(t)$ меньше отрезка $XZ(t)$, а в начале движения неравенство, очевидно, в другую сторону. Значит, в какой-то момент $XY(t) = XZ(t)$. Точка X выбиралась произвольно, а значит, таких треугольников бесконечно много.

Критерии. Верное решение — 7 баллов.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 1 отборочного тура
11 класс

1. Вася написал трехзначное число M и сообщил Вам, что среди чисел от 1 до M ровно пять процентов являются делителями M. Чему может быть равно M? Найдите все варианты, и покажите, что других нет.

Ответ: 480.

Решение. Напомним, что количество делителей числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ (здесь написано каноническое разложение n на простые сомножители) равно $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1)$.

Заметим, что M кратно 20. Если в разложении числа M есть простой множитель p, не меньший 11, то число делителей M делится на p, а значит, M содержит в разложении хотя бы десятую степень простого числа — т.е. M уже хотя бы четырёхзначное. Аналогично, если M делится на 7, то M содержит в разложении хотя бы шестую степень простого числа q. Если $q \geq 3$, то M не является трёхзначным, если же $q = 2$, то M должно делиться на $2^6 \cdot 5 \cdot 7$, т.е. тоже больше 1000.

Итак, искомое число равно $2^a 3^b 5^c$, причём $2^{a-2} 3^b 5^{c-1} = (a+1)(b+1)(c+1)$.

Если $c \geq 2$, то одно из чисел $a+1$, $b+1$, $c+1$ делится на 5. Из ранее озвученных соображений $a = 4$ (остальные варианты приводят к не менее чем четырёхзначному числу). Итак, M делится на $2^4 5^2 = 400$. Легко видеть, что числа 400 и 800 не подходят.

Тогда $c = 1$, и $2^{a-2} 3^b = 2(a+1)(b+1)$, или $2^{a-3} 3^b = (a+1)(b+1)$. Число $2^{a-3} 3^b$ в 40 раз меньше M, т.е. оно не меньше 3 и не больше 25. Таких чисел не очень много: 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 24. Перебрав эти варианты, получим, что подходит только 12, т.е. $M = 480$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Ответ — 2 балла. Сведение к перебору, его отсутствие — 5 баллов. Неверное объяснение, что M кратно 120 — не более 2 баллов.

2. Сумма чисел a, b и c равна 100. Чему равен минимум выражения

$$5a^2 + 3b^2 + 3c^2?$$

Ответ: $\frac{150000}{13}$.

Решение. Заметим, что $b^2 + c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}$. Следовательно, можно считать, что $b = c$. Далее, получаем, что выражение

$$5(100-2b)^2 + 6b^2 = 2(13b^2 - 1000b + 25000)$$

достигает минимум в вершине параболы $b = \frac{500}{13}$. Прямая подстановка показывает, что минимум достигается в точке $a = \frac{300}{13}$, $b = c = \frac{500}{13}$ и равен $\frac{150000}{13}$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Дифференцирование без проверки границы и проверки, что кандидат на локальный экстремум является минимумом — не более 4 баллов. Решение без явного ответа — не более 6 баллов.

3. Назовём *сверхквадратными* такие квадраты натуральных чисел, в записи которых есть только четверки, девятки и нули, причем последняя цифра не 0. Конечно ли множество сверхквадратных чисел?

Ответ: Бесконечно.

Решение. Существует серия $(2 \cdot 10^{2n} + 10^n + 2)^2 = 4 \cdot 10^{4n} + 4 \cdot 10^{3n} + 9 \cdot 10^{2n} + 4 \cdot 10^n + 4$. Другая серия $(10^n - 3)^2 = 10^{2n} - 6 \cdot 10^n + 9 = 9\dots940\dots09$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Пример без обоснования — 5 баллов.

4. В стране n городов, и каждые два соединены прямой авиалинией. Цена перелёта между двумя городами фиксирована и составляет либо 1000, либо 2000 рублей. Известно, что любой маршрут, начинающийся и заканчивающийся в одном городе, обойдётся в чётное число тысяч рублей. Какова наименьшая сумма стоимостей всех авиаперелётов?

Ответ: $250n(3n-4)$ при четных n и $250n(3n-4)$ при нечетных n.

Решение. Рассмотрим граф только на ребрах с весом в 1000. В нем нет нечетных циклов, следовательно, он двудолен. Максимальное число ребер в двудольном графе достигается, когда это полный двудольный граф на равных или почти равных долях. Следовательно, максимальное число ребер с весом 1000 равно $n^2/4$ или $(n^2-1)/4$ в зависимости от четности n. Несложно видеть, что пример в котором ребра степени 1000 образуют полный двудольный граф подходит, так как любой цикл четное число рез меняет долю.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Только пример — 3 балла, только оценка — 4 балла.

5. Докажите, что для любой параболы найдётся бесконечно много равносторонних треугольников, все вершины которых лежат на ней.

Решение. Не умаляя общности будем считать, что парабола смотрит «рогами» вверх. Рассмотрим произвольную точку X на параболе и проведем из нее два луча под углом 60° так, что один луч смотрит вверх, а второй внутрь параболы. Теперь будем эти лучи поворачивать, так чтобы они смотрели в разные стороны относительно вертикального луча из X. После поворота оба луча пересекают параболу, так как квадратичная функция растет быстрее любой линейной; обозначим точки пересечения $Y(t)$ и $Z(t)$. До тех пор пока второй луч не станет вертикальным либо пока первый не выйдет за параболу, обе точки определены. В более ранний из вышеописанных моментов отрезок $XY(t)$ меньше отрезка $XZ(t)$, а в начале движения неравенство, очевидно, в другую сторону. Значит, в какой-то момент $XY(t) = XZ(t)$. Точка X выбиралась произвольно, а значит, таких треугольников бесконечно много.

Критерии. Верное решение — 7 баллов. Верное решение без объяснения, почему пересечения существуют — 5 баллов.