9-11 класс, 2 отбор

АЛГЕБРА

10. Дан квадратный трёхчлен x^2+px+q. Известно, что квадрат суммы его корней на 20 больше суммы квадратов его корней. Найдите q.

20. Выражение $x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 14x + k$ делится на $x-r$ при двух различных действительных r. Одно из них $r = 1$. Найдите другое.

30. Найдите наименьшее такое a, что при любых $x, y \in [2,4]$ выполняется неравенство $x^2+y^2 \le axy$.

40. Решите уравнение $x[x] = 1703$ в рациональных числах. Ответ запишите в виде несократимой дроби.

ГЕОМЕТРИЯ

10. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ см, $BC = AC = 3$ см, точка D — середина AB, а точка E — центр вписанной окружности. Найдите отношение CE/CD.

20. Какую часть площади правильного восьмиугольника $ABCDEFGH$ составляет площадь четырехугольника $CDEF$?

30. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность радиуса 7. DX — хорда этой окружности длины 10, Y — точка пересечения DX и диагонали AC. Найдите DY.

40. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P, для которой $PA : PB : PC = 1 : 2 : 3$. Найдите градусную величину угла APB.

КОМБИНАТОРИКА

10. Мальчик Вася нашёл двузначное число и решил поиграть с ним в игру. Он совершил несколько ходов. На каждом ходу он увеличивает число на 1, а затем меняет местами цифры получившегося числа. Так вышло, что после каждого хода у него получалось двузначное число, причём такое, которое он раньше не получал. Через несколько ходов ему наскучило это занятие и он бросил игру. Какое максимальное количество ходов он мог сделать?

20. На доске 10×10 расставили 10 не бьющих друг друга ладей. Потом все ладьи заменили на королей. Сколько пар королей могут бить друг друга? В поле ответа напишите количество различных вариантов ответа.

30. Улитка ползает путешествует по глобусу. Каждую ночь она ночует на 1 градус севернее или на 1 градус южнее экватора. В течение дня она либо переползает ровно на 36 градусов на восток строго вдоль параллели, либо переходит через экватор строго вдоль меридиана. Улитка никогда не ночует в одном месте. Сколько у неё есть способов совершить кругоглобусное путешествие, вернувшись в точку, из которой она стартовала?

40. N точек на окружности раскрасили в 5 цветов. Потом соединили отрезками одноцветные точки. Для какого максимального N точки можно покрасить так, чтобы нельзя было выбрать 4 непересекающихся отрезка? (Отрезки с общими концами тоже считаются пересекающимися.)

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

10. Переставьте цифры в числе 6210 так, чтобы получившееся четырёхзначное число делилось на все ненулевые цифры, кроме 5.

20. У скольких чисел от 600 до 900 количество делителей является нечётным простым числом?

30. Разность двух натуральных чисел равняется квадрату их наибольшего общего делителя, а произведение является квадратом некоторого натурального числа A. Чему может быть равен остаток от деления A на 15? Перечислите все возможные варианты в порядке возрастания через пробел.

40. Найдите наибольшее натуральное n, при котором $2n^2+1$ имеет делитель на интервале $[n, n+50]$.