Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

5 класс

Не забывайте прочесть регламент дистанционного этапа, а также подробно обосновать свой ответ. Пишите, пожалуйста, разборчиво.

Удачи!

1. Винни-Пух вышел с некоторой скоростью в гости к Кролику. Он посчитал, что если все время будет идти с этой скоростью, то дойдет ровно за час. На трети дороги ему встретился Пятачок. Следующие десять минут Винни-Пух беседовал с ним. Затем он увеличил скорость в два раза и успел бы вовремя, но ровно посередине оставшегося пути на дорогу выскочил Тигра и семь минут рассказывал Винни анекдоты. Во сколько раз (относительно исходной) Винни-Пух теперь должен увеличить свою скорость, чтобы прибыть к Кролику в намеченное время?

2. Сколько решений имеет ребус

$$\text{ЗИМА} + \text{СКОРО} = \text{ПРИДЁТ},$$

где одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, а различными — различные?

3. Трое пиратов делят клад, состоящий из 10 золотых слитков. Массы слитков равны — 6, 9, 15, 18, 24, 27, 42, 48, 57 и 75 кг. Могут ли пираты поделить золото поровну?

4. На противень 99×99 выложили несколько печенек, каждая в форме квадрата 2×2, причем стороны печенек параллельны сторонам противня. Докажите, что одну из печенек можно чуть-чуть подвинуть, не трогая все остальные. (Печеньки не лежат друг на друге, у противня есть бортики.)

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

6 класс

Не забывайте прочесть регламент дистанционного этапа, а также подробно обосновать свой ответ. Пишите, пожалуйста, разборчиво.

Удачи!

1. Алексей, Арсений, Мария, Милана, Савва и Сергей хотят сесть на скамейку так, чтобы у соседей имена начинались на разные буквы. Сколько у них есть способов это сделать?

2. В натуральном числе A переставили цифры и получили число B. Может ли произведение A и B равняться $30\ldots09$?

3. На доске размером $m \times n$ клеток расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьет ровно одну другую. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали присутствует как минимум одна ладья. Докажите, что $n+m$ делится на 3.

4. Верблюд — шахматная фигура, которая ходит на три клетки в одну сторону, а затем на одну в перпендикулярном направлении. Вася выписал все способы расставить несколько верблюдов на доске 8×8 (включая тот, где никаких верблюдов нет), а затем стер те, в которых найдутся угрожающие друг другу верблюды. Докажите, что число оставшихся расстановок является квадратом натурального числа.

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

7 класс

Не забывайте прочесть регламент дистанционного этапа, а также подробно обосновать свой ответ. Пишите, пожалуйста, разборчиво.

Удачи!

1. В натуральном числе A переставили цифры и получили число B. Может ли произведение A и B равняться $20\ldots09$?

2. На противень 99×99 выложили несколько печенек, каждая в форме квадрата 2×2, причем стороны печенек параллельны сторонам противня. Докажите, что одну из печенек можно чуть-чуть подвинуть, не трогая все остальные. (Печеньки не лежат друг на друге, у противня есть бортики.)

3. На доске размером $m \times n$ клеток расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьет ровно одну другую. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали присутствует как минимум одна ладья. Докажите, что $n + m$ делится на 3.

4. Решите уравнение $x \times [x \times [x]] = 65$ при $x > 0$. Напомним, что $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

8 класс

Не забывайте прочесть регламент дистанционного этапа, а также подробно обосновать свой ответ. Пишите, пожалуйста, разборчиво.

Удачи!

1. Пусть $a = 1$, b и c — самые маленькие делители числа n. Найдите все n для которых
$$n = (a + b + c)^2.$$

2. Пусть I — точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Оказалось, что $AI = 2 \cdot IA_1$ и $BI = 2 \cdot IB_1$. Докажите, что $CI = 2 \cdot IC_1$.

3. Докажите неравенство
$$2(a + b + c) \geqslant \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+c} + \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} + \sqrt{a+c} \cdot \sqrt{b+c}$$
для положительных чисел a, b и c.

4. Найдите все такие натуральные n, что $5^{n^3} + n + 12$ делится на $5^{n^2} + n + 101$.

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

9 класс

Не забывайте прочесть регламент дистанционного этапа, а также подробно обосновать свой ответ. Пишите, пожалуйста, разборчиво.

Удачи!

1. Пусть I — точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Оказалось, что $AI = 2 \cdot IA_1$ и $BI = 2 \cdot IB_1$. Докажите, что $CI = 2 \cdot IC_1$.

2. Докажите, что сумма двух одночленов не может равняться произведению многочлена $P(x, y)$ с вещественными коэффициентами и многочлена $1 + x + y$.

3. Решите уравнение $x \times [x \times [x \times [x]]] = 82$ при $x > 0$. Напомним, что $[x]$ обозначает целую часть числа x.

4. Пусть $a = 1$, b, c и d — самые маленькие делители числа n. Найдите все n, для которых

$$n = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

10 класс

Не забывайте прочесть регламент дистанционного этапа, а также подробно обосновать свой ответ. Пишите, пожалуйста, разборчиво.

Удачи!

1. Высоты AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $BP = 1$, $BH = \sqrt{2}$, $BQ = 10$. Найдите BC.

2. На клетчатой доске 8×8 отмечены центры всех клеток. Какое наибольшее количество отмеченных точек можно выбрать так, чтобы все попарные расстояния между ними были натуральными?

3. Найдите все пары взаимнопростых натуральных чисел a и b для которых $5a + 1$ делится на b и $7b - 1$ делится на a.

4. Существуют ли вещественные числа a, b и c для которых выполняются неравенства $a^3 + b^3 + c^3 > 0$, $a^5 + b^5 + c^5 < 0$ и $a^7 + b^7 + c^7 > 0$?

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

11 класс

Не забывайте прочесть регламент дистанционного этапа, а также подробно обосновать свой ответ. Пишите, пожалуйста, разборчиво.

Удачи!

1. Высоты AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $BP = 1$, $BH = \sqrt{2}$, $BQ = 10$. Найдите BC.

2. На окружности отмечено 12 точек. Вася пришел и нарисовал четыре непересекающихся (в том числе по вершинам) треугольника с концами в этих точках. Найдите число способов, которыми Вася мог это сделать.

3. На плоскости отмечены точки $A_1, \ldots, A_n$ такие, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками принадлежит множеству $\{1, 3, 5, \ldots, 101\}$. Докажите, что $n \leqslant 2700$.

4. Пусть I — точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Оказалось, что

$$\frac{AI}{IA_1} = \frac{BI}{IB_1} = 1 + \sqrt{3}.$$

Найдите $\frac{CI}{IC_1}$.

5. Могут ли неравенства

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 + d^3 > 0 \\ a^5 + b^5 + c^5 + d^5 < 0 \\ a^7 + b^7 + c^7 + d^7 > 0 \end{cases}$$

выполняться для некоторых вещественные чисел a, b, c и d?