Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 18 декабря 2023 года
10 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.

P — некий полином с целыми коэффициентами, A и M — целые числа. Построим последовательность a_n, где $a_1 = A$, и $a_{n+1} = P(a_n)$ и пусть r_n — остаток от деления a_n на M.

1.1. Пусть $P(x) = x^2 + x + 1$, $A = 1$, $M = 3^{2022}$. Докажите, что период последовательности r_n (то есть, такое наименьшее t, что $r_{n+t} = r_n$ при достаточно больших n) равен 2.

1.2. Найдите длину предпериода той же последовательности (то есть такое наибольшее n, что $a_{n+t} \neq a_n$, где t — период).

Сюжет 2.

Вася выписал на доске по кругу все перестановки из n элементов и соединил отрезками те перестановки, разность которых (по модулю n) тоже является перестановкой.

2.1. Докажите, что если n четное, то и отрезков Вася не проводил.

2.2. Пусть p — наименьший простой множитель n. Докажите, что тогда найдутся $p-1$ таких перестановок, что Вася соединил каждую из них с каждой.

Сюжет 3.

Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. На меньшей дуге BC его описанной окружности выбирается переменная точка D. Точка D' симметрична точке D относительно прямой BC. Луч CD' пересекает отрезок AB в точке E. Луч BD' пересекает отрезок AC в точке F.

3.1. Докажите, что точка D' лежит на описанной окружности ω треугольника AEF;

3.2. Известно, что в положении $D = D_1$ центр окружности ω лежит на отрезке AB, а в положении $D = D_2$ — на стороне AC. Отрезки BD_2 и CD_1 пересекаются в точке X. Докажите, что прямые AX и BC перпендикулярны.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 18 декабря 2023 года
10 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.

P — некий полином с целыми коэффициентами, A и M — целые числа. Построим последовательность a_n, где $a_1 = A$, и $a_{n+1} = P(a_n)$ и пусть r_n — остаток от деления a_n на M.

1.3. Назовем полином *стабильным по модулю* M, если существует B, такое что для любого A найдется k, для которого $r_k = B$. Докажите, что полином $f = x^3 - x^2 - 2$ нестабилен по модулю M, если M является квадратом нечётного числа.

1.4. Докажите, что многочлен $x^2 - 3x + 12$ стабилен для бесконечного числа натуральных M.

Сюжет 2.

Вася выписал на доске по кругу все перестановки из n элементов и соединил отрезками те перестановки, разность которых (по модулю n) тоже является перестановкой.

2.3. Пусть $\omega(n)$ — размер максимального набора перестановок, где каждая соединена с каждой. Докажите, что $\omega(ab) \geqslant \min(\omega(a), \omega(b))$.

2.4. Докажите, что при нечетном $n > 3$ Вася нарисовал четырехугольник.

Сюжет 3.

Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. На меньшей дуге BC его описанной окружности выбирается переменная точка D. Точка D' симметрична точке D относительно прямой BC. Луч CD' пересекает отрезок AB в точке E. Луч BD' пересекает отрезок AC в точке F.

3.3. Окружность ω вторично пересекает окружность ABC в точке G. Докажите, что прямая $D'G$ проходит через фиксированную точку.

3.4. Докажите, что если $\angle A = 60°$, то расстояние от вершины A до точки Торричелли треугольника ABC не превосходит диаметра окружности ω (при любом положении точки D). Напомним, что точкой Торричелли треугольника ABC называется такая точка T, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$.