1. *У костра по кругу сидят семеро туземцев из нескольких племен. Каждый говорит своему соседу слева: «Среди остальных пятерых нет моих соплеменников». Известно, что туземцы лгут чужим и говорят правду своим. Представители скольких племен собрались у костра?*

Решение. Если есть хотя бы 4 туземца из одного племени, то двое из них сидят рядом, тогда один из них солжет другому, хотя должен сказать правду. Если из какого-то племени лишь один туземец, то он говорит правду левому соседу, хотя должен врать. Значит, каждое племя имеет двух или трех представителей.

Тогда при двух племенах туземцев не более $3+3<7$, при четырех — не менее $2+2+2+2>7$, то есть племен ровно три.

Критерии. Полное решение — 4 балла.

Явно предъявленный пример рассадки, подходящей под условие — 1 балл.

2. *В углах квадратного двора стоят четыре дома, в которых живут* 77 *хулиганов, дружащих между собой. Начиная с* 1 *января* 2017 *года каждый день навсегда ссорились какие-то два хулигана из разных домов, а к* 1 *января* 2018 *года оказалось, что друзей из соседних домов не осталось. Докажите, что какая-то из ссор была между хулиганами из противоположных домов.*

Решение. Предположим противное. Далее см. решение задачи 7 для 6 класса.

Критерии. Полное решение — 4 балла.

За потерю случая $1 \cdot 365$ снимался 1 балл.

Идея неравенства — 1 балл.

Идея четности — 1 балл.

3. *В наборе были гирьки массой* 5, 24 *и* 43 *грамма, поровну каждого вида. Все имеющиеся гирьки взвесили, и их масса оказалась равной* $606060\ldots60$ *граммам. Докажите, что более* 10 *гирек потеряно.*

Решение. Если ни одна гирька не потеряна, то суммарный вес должен делиться на 24, а он имеет остаток 12 от деления на 24 (т. к. делится на 3 и на 4, но не на 8). Значит, суммарный вес потерянных гирь тоже имеет остаток 12 от деления на 24. Поймём, как получить остаток 12 наименьшим количеством (потерянных) гирь. Можно считать, что не потеряна ни одна 24-граммовая гиря и не потеряна пара гирь $5+43$, т. к. ни то, ни другое не меняет остатка от деления на 24. Значит, считаем, что потеряны либо только 5-граммовые гири, либо только 43-граммовые. Любых из них нужно хотя бы 12.

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

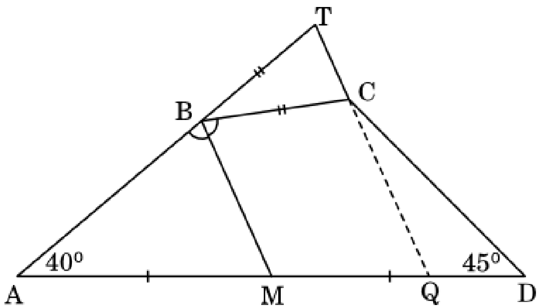
Решения, содержащие «а вот тут можно перебрать...» без самого перебора, если случаев много — не более 2 баллов.

4. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол A равен $40°$, угол D равен $45°$, биссектриса угла B делит AD пополам. Докажите, что $AB > BC$.*

Решение. Рассмотрим на продолжении стороны AB за точку B такую точку T, что $BT = BC$. Пусть M — середина AD. Тогда $\angle BTC = \angle TCB = \frac{1}{2}\angle ABC$, то есть BM параллельна TC. Обозначим за Q точку пересечения прямых TC и AD; покажем что она лежит на отрезке AD. Это так, поскольку

$$\angle BCD + \angle TCB = (360° - \angle BAC - \angle ABC - \angle ADC) + \angle TCB = \\ = 275° - \frac{1}{2}\angle ABC > 180°.$$

Значит, $AM > MQ$ и $AB > BC$.



Критерии. Полное решение — 6 баллов.

5. *На учениях «Путь к миру–2017» по кругу расположены 2017 воронок, в одной из которых прячется враг. Артиллерия может залпом обстрелять некоторые (но не все) воронки, после чего враг переползает в следующую по часовой стрелке. При этом ни в какую воронку нельзя стрелять дважды. Какое наименьшее число залпов нужно дать артиллеристам, чтобы гарантированно поразить врага? Не забудьте доказать, что оно наименьшее.*

Решение. Ответ: 3 залпа.

Оценка. Двух залпов мало: после первого залпа найдётся необстрелянная воронка А, после которой (по часовой стрелке) идёт обстрелянная воронка Б. Если враг находился в А, то после первого залпа он перейдёт в Б и не будет убит вторым залпом.

Пример. Пронумеруем воронки по часовой стрелке от 1 до 2017. Можно убить врага, например, такими тремя залпами.

- Залп 1: воронки 2, 4, 6, ..., 2014, 2016. Если враг не убит, то после переползания он может оказаться в воронках 1, 2, 4, 6, 8, ..., 2016.

- Залп 2: воронка 1. Если враг не убит, то после переползания он может оказаться в воронках 3, 5, 7, ..., 2017.
- Залп 3: воронки 3, 5, 7, ..., 2017. Теперь враг гарантированно убит.

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

Доказано, что 2 и меньше выстрела нельзя — 1 балл.

Не доказано, что за 2 и меньше выстрелов нельзя — снимался 1 балл.

Верный алгоритм без всякого обоснования — 1 балл.

6. *В противоположных углах шахматной доски стоят кони. Двое игроков по очереди вырезают из доски свободные клетки. Проигрывает тот, после чьего хода один конь не сможет доскакать по доске до другого. Кто из игроков сможет выиграть, как бы ни ходил другой?*

Решение. Заметим, что в момент перед последним ходом у нас останется только клетки, образующие путь между конями, иначе можно сделать еще больше одного хода. Поскольку при ходе коня клетка под конем меняет цвет, все пути между конями состоят из нечетного количества клеток. Значит, перед последним ходом будет выкинуто тоже нечетное количество клеток, и этот ход достанется второму игроку. То есть выиграет первый игрок.

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

Идеи четности — не более 2 баллов.

7. *Найдите все простые p и натуральные n, удовлетворяющие равенству $p^2 + n^2 = 3pn + 1$.*

Решение. Очевидно, $n^2 - 1 = p(3n - p)$, то есть n равно ± 1 по модулю p. Подставим $n = ap \pm 1$ в равенство, после преобразований получим

$$(a^2 + 1 - 3a)p^2 = \pm(3 - 2a)p.$$

Значит, $(3 - 2a) \vdots p$.

Если $a = 0$, выходит решение $p = 3$, $n = 1$.

Иначе $a \geqslant 3$. С другой стороны, $n \leqslant 3p$, иначе правая часть исходного равенства больше левой. Тогда n может быть равно только $3p - 1$, откуда легко следует $p = 3$, $n = 8$.

Критерии. Полное решение — 8 баллов.

Только ответ — 1 балл.