

1. Андрей назвал все натуральные числа от 180 до 220 включительно («сто восемьдесят», «сто восемьдесят один» и т.д.). Сколько слов он произнёс?

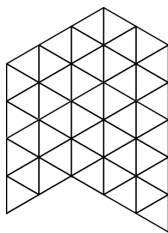
**Решение.** Всего названо 41 число. В каждом назван разряд сотен (итого 41 слово). Кроме разряда сотен, ещё по одному слову содержат числа 180, 190, 201–220 (это 22 слова). Число 200 больше не даёт вклада в слова, а остальные 18 чисел содержат ещё по два слова. Итого  $41 + 22 + 2 \cdot 18 = 99$  слов.

**Критерии.** Полное решение — 3 балла.

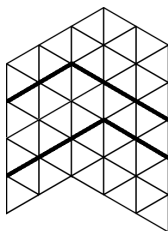
Только верный ответ — 1 балл.

В целом верное решение, но ошибочный ответ (не более одной ошибки при подсчёте) — 1 балл.

2. Покажите, как разрезать фигурку на картинке на три равные части.



**Решение.**



**Критерии.** Верный пример — 3 балла.

3. У костра по кругу сидят восемь туземцев из четырёх племен. Каждый говорит своему соседу слева: «если не считать нас, то из моего племени тут никого нет». Известно, что туземцы лгут чужим и говорят правду своим. Сколько может быть туземцев каждого племени?

**Решение.** Из одного племени должно быть не менее двух туземцев — уникальный туземец не смог бы солгать соседу, что из его племени больше никого нет. Так как племён всего четыре, то из каждого племени по двое.

**Критерии.** Полное решение — 4 балла.

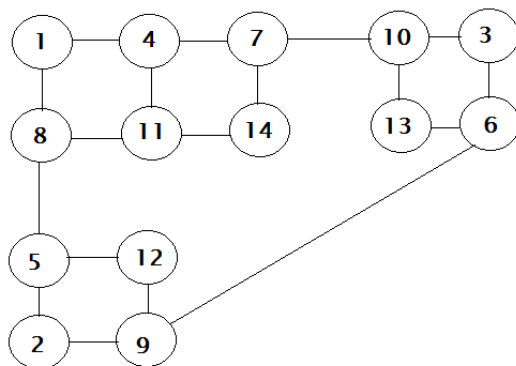
Только верный ответ — 0 баллов.

Разбор частного случая — 0 баллов.

Доказательство, что в каждом племени не менее двух туземцев — 2 балла.

4. Девочка стоит на 1 этаже 14-этажного дома, на 12 и 14 этажах которого живут её подружки. Перемещаться по нему можно только на лифте, который умеет перемещать только на 3 или 7 этажей вверх или вниз. Может ли девочка посетить всех подружек, совершив не больше 6 переездов на лифте?

**Решение (1).**



На рисунке изображена схема возможных переездов — в кружочках подписаны этажи, а линиями соединены те этажи, между которыми можно проехать на лифте, нажав одну кнопку.

Отсюда видно, что с первого на 12-й и на 14-й этажи можно добраться минимум за три переезда, а от 12 до 14 этажа требуется не менее четырёх переездов. Поэтому за 6 переездов девочка не сможет посетить всех подружек.

**Решение (2).** Заметим, что каждый переезд меняет чётность этажа. С первого этажа до двенадцатого или до четырнадцатого требуется нечётное число переездов. Так как за один переезд не управиться, то таких переездов надо не менее трёх. С 12-го до 14-го этажа надо чётное число переездов. За два переезда добраться невозможно (ибо 3 и 7 отличаются на 4), поэтому нужно не менее четырёх переездов. В итоге требуется не менее семи переездов.

**Критерии.** Полное решение — 4 балла

Ответ «может» — 0 баллов

Верный ответ без объяснения — 0 баллов

Соображение, что с первого этажа до 12 или до 14 можно добраться не менее чем за три переезда — 1 балл

Соображение, что с 12 на 14 этаж и наоборот можно добраться не менее чем за 4 переезда — 1 балл

Пример на 7 переездов — не более 1 балла

Соображение чётности числа переездов — 1 балл.

**5.** *Вчера на базаре на сто тугриков можно было купить 9 пряников и 7 пирожных (и даже дали бы сдачу), а сегодня этой суммы уже не хватает. Зато на эти же 100 тугриков сегодня можно купить два пряника и 11 пирожных (тоже со сдачей), а вчера бы этой суммы не хватило. Пряник и пирожное стоят целое число тугриков, а цена каждой сладости за ночь изменилась не более чем на один тугрик. А сколько сегодня стоит один пряник?*

**Решение.** Заметим, что что-то одно подорожало (иначе не могла возникнуть ситуация, при которой вчера мы могли купить набор, а сегодня тот же набор — нет), а другая сладость по аналогичным причинам подешевела. Девять пряников и семь пирожных вместе подорожали, значит, пряник подорожал, а пирожное подешевело. Этот набор подорожал за ночь на 2 тугрика, т. е. вчера он стоил 99 тугриков, а сегодня 101. Итак, сегодня 9 пряников = 101 тугрик — 7 пирожных, т. е. вычитая из 101 число, кратное 7, мы должны получить число, кратное 9. Такое возможно лишь в одном случае:  $101 - 56 = 45$ . Тогда пряник сегодня стоит 5 тугриков, а пирожное — 8 тугриков.

**Критерии.** Полное решение — 6 баллов

Только ответ — 0 баллов

Ответ с примером (что сколько стоит, и как менялись цены) — 1 балл

Объяснение, как изменились цены (что подорожало, а что подешевело) — 2 балла

Вывод утверждения, что вчера первый набор стоил 99, а сегодня 101 тугрик — 2 балла

**6.** *В наборе были гирьки весом 43, 70, 57 г, поровну каждого вида. Малыш потерял несколько гирек (менее пяти), взвесил остаток на весах и получил 20172 грамма. Сколько и каких гирек потерялось?*

**Решение (1).** Если бы гирьки не терялись, то общий вес оканчивался бы на 0. Следовательно, вес потерянных гирек оканчивается на 8. Это может быть, только если потеряны 4 гирьки 57 г (потеря 70 г или пары 43 + 57 не влияет на последнюю цифру суммарного веса).

**Решение (2).** Разобьём изначальный набор гирек на тройки 43+70+57. В каждой тройке общий вес равен 170 г. Заметим, что потеряно не более  $4 \cdot 70 = 280$

г. Поэтому нам следует найти все числа от 20 172 до 20 452, кратные 170. Таких чисел всего два: 20 230 и 20 400 г.

В первом случае потеряно 58 г, чего не может быть. Во втором случае потеряно 228 г. Этот вариант возможен, только если потеряно 4 гири по 57 г. В самом деле, количество потерянных 70-граммовых гирь должно быть чётно (иначе бы потерянный вес был нечётным). Если не потеряно ни одной гири по 70 г, то максимально возможный потерянный вес составляет  $4 \cdot 57 = 228$  г. Если же потеряно две 70-граммовые гири, то остаётся 88 г на две оставшиеся гири, а этот вес набрать, очевидно, нельзя.

**Критерии.** Полное решение — 5 баллов

Верный ответ или ответ с примером — 1 балл

Не доказано, что 288 можно разложить только как 4 по 57 гирек — не более 4 баллов

Рассмотрены только варианты, когда потеряно 58 или 288 гирек — не более 3 баллов

**7.** *22 футболиста сыграли три тренировочных игры (разбиваясь каждый раз на два состава по 11 человек). Докажите, что какие то два футболиста все три раза играли в разных командах.*

**Решение (1).** После первого матча выкрасим ребят, игравших в одной команде, в красный, а игравших в другой команде — в синий. Тогда во втором матче среди каждого из составов найдутся по крайней мере 6 одноцветных ребят, причем эти шестерки разных цветов. А в этих двух шестерках найдутся два разноцветных футболиста, не сыгравших в одной команде и в третий раз (иначе им всем нужно попасть в одну команду, для чего их слишком много).

**Решение (2).** Изобразим игроков в виде точек и будем соединять отрезками тех, кто был сокомандником. После первой игры от каждого игрока будет выходить по 10 отрезков, а так как каждый соединяет двоих, то всего отрезков будет  $\frac{22 \cdot 10}{2} = 110$ . Теперь посмотрим на произвольную команду во второй или третьей игре. Пусть  $x$  ребят из нее были в первом матче на одной стороне, а оставшиеся  $11 - x$  — на другой. Тогда новых отрезков добавится не более, чем  $x(11 - x) \leq 30$  (это можно, например, легко проверить перебором). То есть за оставшиеся две игры отрезков добавится, максимум,  $4 \cdot 30 = 120$  и в итоге их будет не более  $110 + 120 = 230$ . Но если бы каждый сыграл с каждым, то их было бы  $\frac{22 \cdot 21}{2} = 231$ .

**Критерии.** Полное решение — 6 баллов

Рассуждение про вратарей или капитанов команд — 0 баллов

Соображение про 5 или 6 игроков после второго разбиения — 2 балла