Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 4 декабря 2016 года
9 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.
Пусть I — центр вписанной окружности α треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает α в точках P и Q так, что P и A лежат по одну сторону от прямой BI, а Q и C — по другую. Обозначим через M середину меньшей дуги AB описанной окружности треугольника ABC, а через N — середину меньшей дуги BC.

1.1. Докажите, что если $PQ \parallel AC$, то треугольник ABC равнобедренный.

1.2. Докажите, что $MN > PQ$.

Сюжет 2.
Пусть $x, y, z > 0$. Докажите следующие неравенства:

2.1.
$$\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy} \geqslant 1$$

2.2.
$$\frac{x^2+2y^2+2z^2}{x^2+yz}+\frac{y^2+2z^2+2x^2}{y^2+zx}+\frac{z^2+2x^2+2y^2}{z^2+xy} > 6$$

Сюжет 3.
На столе лежит куча из n камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньшие. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

3.1. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более чем в $\sqrt{2}$ раз. Докажите, что из исходной кучи не получится сделать 3 кучки.

3.2. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более чем вдвое. Докажите, что тогда любую кучу можно разложить на кучи по одному камню.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 4 декабря 2016 года
9 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.
Пусть I — центр вписанной окружности α треугольника ABC. Описанная окружность треугольника AIC пересекает α в точках P и Q так, что P и A лежат по одну сторону от прямой BI, а Q и C — по другую. Обозначим через M середину меньшей дуги AB описанной окружности треугольника ABC, а через N — середину меньшей дуги BC.

1.3. Пусть L — точка пересечения прямых AP и CM, S — точка пересечения прямых AN и CQ. Докажите, что $LS \parallel PQ$.

1.4. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

Сюжет 2.
Пусть $x, y, z > 0$. Докажите следующие неравенства:

2.3.
$$\frac{x^3}{x^3+2y^2\sqrt{zx}}+\frac{y^3}{y^3+2z^2\sqrt{xy}}+\frac{z^3}{z^3+2x^2\sqrt{yz}} \geqslant 1$$

2.4.
$$\frac{x^3}{x^3+2y^2z}+\frac{y^3}{y^3+2z^2x}+\frac{z^3}{z^3+2x^2y} \geqslant 1$$

Сюжет 3.
На столе лежит куча из n камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньшие. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

3.3. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются менее чем в 2 раза. Докажите, что кучу из 660 камней можно разбить на 30 кучек.

3.4. Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются менее чем в 2 раза. Докажите, что кучу из 660 камней нельзя разбить на 31 кучку.