Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 17 декабря 2017 года
9 класс. Основная аудитория

Сюжет 1

Во всех пунктах под $f(x)$ подразумевается многочлен с вещественными коэффициентами.

1.1. Известно, что $f(f(x)) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$. Найдите все такие многочлены $f(x)$.

1.2. Пусть $q < 0$, и пусть $f(x) = x^2 + px + q$. Докажите, что многочлен $f(f(\ldots f(x)\ldots))$ имеет корень.

Сюжет 2

Окружность ω с центром в точке I вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Биссектрисы треугольника ADE пересекаются в точке J. Отрезки BJ и CJ пересекают отрезок DE в точках P и Q соответственно.

2.1. Докажите, что $PJ > PD$.

2.2. Известно, что $IJ = DE$. Найдите угол BAC.

Сюжет 3

По кругу стоит N фишек черного и белого цветов. За ход можно поменять цвета у любой пары одноцветных фишек, стоящих через одну (между ними может стоять фишка любого цвета), или у любой тройки подряд идущих фишек, таких что цвет первой из них (считая по часовой стрелке) отличается от цвета двух других.

3.1. Пусть $N = 8$. Докажите, что можно добиться того, чтобы осталось не более одной черной фишки.

3.2. Пусть $N = 2018$. Докажите, что можно получить полностью белую расстановку.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 17 декабря 2017 года
9 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1

Во всех пунктах под $f(x)$ подразумевается многочлен с вещественными коэффициентами.

1.3. Докажите, что не существует многочлена $f(x)$, такого что

$$f(f(\ldots f(x)\ldots)) = x^{243} - 3x^{162} - 4x^{81} + 13$$

(f применяется более одного раза).

1.4. Многочлен $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(f(x)) + f(-f(-x)) = f(-f(x)) + f(f(-x)).$$

Докажите, что $f(-x) = f(x)$.

Сюжет 2

Окружность ω с центром в точке I вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Биссектрисы треугольника ADE пересекаются в точке J. Отрезки BJ и CJ пересекают отрезок DE в точках P и Q соответственно.

2.3. Докажите, что периметр треугольника BJC больше периметра четырехугольника $BDEC$.

2.4. Пусть M и N — середины DJ и JE. Докажите, что $PM = QN$.

Сюжет 3

По кругу стоит N фишек черного и белого цветов. За ход можно поменять цвета у любой пары одноцветных фишек, стоящих через одну (между ними может стоять фишка любого цвета), или у любой тройки подряд идущих фишек, таких что цвет первой из них (считая по часовой стрелке) отличается от цвета двух других.

3.3. Пусть $N = 15$, причём разрешена только вторая операция. Докажите, что из любой расстановки можно получить менее 10^4 других.

3.4. Пусть $N = 1000$, и ровно одна из фишек чёрная (снова разрешены обе операции). Можно ли получить расстановку из одних черных фишек?