Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
14 октября 2023 года
9 класс

Решения

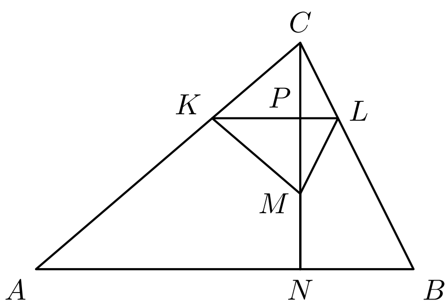
1. Для четырёх попарно различных ненулевых чисел a, b, c, d выполнено равенство $\dfrac{a}{b+c+d} = \dfrac{b}{a+c+d}$. Докажите, что $\dfrac{c}{a+b+d} = \dfrac{d}{a+b+c}$.

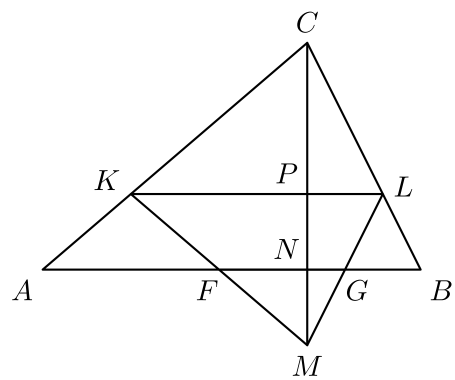
Решение. Обозначим $S = a+b+c+d$. Тогда $\frac{a}{S-a} = \frac{b}{S-b} \Leftrightarrow S(a-b) = 0$. Так как $a \neq b$, то $S = 0$. Следовательно, $\frac{c}{a+b+d} = \frac{c}{S-c} = \frac{c}{-c} = -1$. Аналогично, $\frac{d}{a+b+c} = -1$.

Критерий. Полное решение — 7 баллов.

2. Бумажный остроугольный треугольник площади 1 перегнули вдоль прямой, параллельной одной из сторон. Какую наименьшую площадь может занимать полученная фигура?

Решение.





Пусть треугольник перегнули вдоль прямой $KL \parallel AB$. Обозначим: M — точка, симметричная точке C относительно KL, $N = MC \cap AB$, $P = MC \cap KL$, $CN \perp AB$, $h = CN$, $x = CP$.

Если $x \leqslant h/2$, то точка M лежит внутри треугольника ABC (см. рисунок слева), а площадь полученной фигуры равна площади трапеции $AKLB$ и равна (так как треугольники ABC и KLC подобны):

$$S_{AKLB} = S_{ABC} - S_{KLC} = 1 - \left(\frac{x}{h}\right)^2 \geqslant 1 - \left(\frac{h/2}{h}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Если $x > h/2$, то к площади трапеции $AKLB$ добавляется площадь треугольника MFG, подобного ABC, где $F = AB \cap MK$, $G = ML \cap AB$ (см. рисунок справа). Поэтому площадь полученной фигуры равна

$$S_{AKLB} = 1 - \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{2\,x-h}{h}\right)^2 = 3\,\left(\frac{x}{h}\right)^2 - 4\,\frac{x}{h} + 2 = \left(\sqrt{3}\frac{x}{h} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{2}{3} \geqslant \frac{2}{3}.$$

Следовательно, наименьшая площадь полученной фигуры равна $\frac{2}{3}$, и это значение достигается при $x = \frac{2}{3}\,h$.

Критерий. Полное решение — 7 баллов. Если не сказано, что наименьшее значение площади достигается, — 6 баллов. Если разобран только второй случай ($x > h/2$) — 4 балла. Если разобран только первый случай ($x \leqslant h/2$) — 2 балла.

3. Существуют ли натуральные числа a, b, c, такие что

$$\text{НОК}(a,b) + \text{НОК}(b,c) = \text{НОК}(a,c)?$$

Решение 1. Из равенства $\text{НОК}(a,b) = \text{НОК}(a,c) - \text{НОК}(b,c)$ следует, что $\text{НОК}(a,b)$ делится на c (так как $\text{НОК}(a,c)$ и $\text{НОК}(b,c)$ делятся на c). Кроме того, $\text{НОК}(a,b)$ делится на a. Следовательно, $\text{НОК}(a,b)$ является общим кратным чисел a и c, и $\text{НОК}(a,b) < \text{НОК}(a,c)$. Это противоречит тому, что $\text{НОК}(a,c)$ — наименьшее общее кратное.

Решение 2. Докажем от противного, что таких a, b, c не существуют. Пусть такие натуральные числа существуют. Среди всех подходящих троек выберем ту, у которой число c минимально. Пусть эта тройка a, b, c. Предположим, что p — это простой делитель числа c. Тогда $\text{НОК}(a,c) \vdots p$ и $\text{НОК}(b,c) \vdots p$. Значит, $\text{НОК}(a,b)$ тоже делится на p. Построим новую тройку a', b', c':

$a' = a$, если $a \not\vdots\, p$, и $a' = a/p$, если $a \vdots p$;

$b' = b$, если $b \not\vdots\, p$, и $b' = b/p$, если $b \vdots p$;
$c' = c/p$.
Тогда:

$$p\,\text{НОК}(a',b') + p\,\text{НОК}(b',c') = p\,\text{НОК}(a',c').$$

Сокращая на p, получаем, что тройка чисел a', b', c' тоже удовлетворяет исходному равенству, но $c' < c$. Следовательно, c не может иметь простых делителей. Значит $c = 1$. Поэтому

$$\text{НОК}(a,b) + b = a \quad \Leftrightarrow \quad \text{НОК}(a,b) = a - b,$$

но это невозможно, так как $\text{НОК}(a,b) \geqslant a > a - b$.

Замечание 1. Можно не брать подходящую тройку с минимальным c, а провести процедуру деления на простой делитель числа c до тех пор, пока у c не останется простых делителей.

Замечание 2. Процедуру сокращения простого делителя можно также провести и с числами a и b.

Критерий. Полное решение — 7 баллов. Если показано, что можно сократить на простой делитель числа c (или числа a, или числа b), — 5 баллов.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямой BD, а точки B' и D' симметричны точкам B и D относительно прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ вписанный.

Решение. Пусть $F = AC \cap BD$ — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Так как прямая $A'C'$ симметрична прямой AC относительно прямой BD, то $F \in A'C'$. Кроме того $A'F = FC'$. Поэтому $AF \cdot FC = A'F \cdot FC'$. Аналогично, $F \in B'D'$ и $BF \cdot FD = B'F \cdot FD'$. Так как $ABCD$ — вписанный, то $AF \cdot FC = BF \cdot FD$. Следовательно, $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$. Значит четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный. Действительно, из $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$ вытекает $\frac{A'F}{FD'} = \frac{B'F}{FC'}$, а так как $\angle A'FB' = \angle C'FD'$, то треугольники $A'FB'$ и $C'FD'$ подобны, и $\angle A'B'F = \angle D'C'F$. Поэтому четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный.

Критерий. Полное решение — 7 баллов. При этом часть доказательства после слова «Действительно» можно опустить.

5. В сундуке лежат 2023 монеты. Пираты Билли Бонс и Джон Флинт по очереди берут монеты из сундука. Начинает Билли. За ход пират должен выбрать счастливое число из набора: 2, 3, 4, 5, 6, 7, затем найти остаток от деления числа монет в сундуке на выбранное число (этот остаток должен быть положителен), а потом взять себе столько монет, сколько получилось в остатке. Когда ни один из пиратов уже не может взять ни одной монеты, подводят итог: капитаном становится тот, кто наберёт больше монет. Кто из пиратов сможет стать капитаном независимо от тактики противника?

Решение. Игра закончится, когда в сундуке останется 1680 монет, так как 1680 — это наибольшее число, которое меньше 2023 и делится на $\text{НОК}(2,3,4,5,6,7)$. Поэтому пираты заберут $2023 - 1680 = 343$ монеты. Для победы надо набрать не менее $(343+1)/2 = 172$ монеты.

Покажем, что Флинт (второй игрок) сможет обеспечить себе победу, если он всегда будет брать себе остаток от деления на 7.

1. Флинт всегда сможет сделать ход. Если перед ходом Билли в сундуке лежит $7\,k$ монет, то после хода Билли в сундуке будет не менее $7\,k - 5$ и не более $7\,k - 1$ монет. Поэтому Флинт сможет взять хотя бы две монеты и после хода Флинта в сундуке будет $7\,(k-1)$ монет.

Перед первым ходом Билли в сундуке $2023 = 7 \cdot 289$ монет. Следовательно, Флинт всегда сможет сделать ход, а перед каждым ходом Билли число монет в сундуке будет кратно 7.

2. Так как $1680 = 7 \cdot 240$, а за пару ходов число монет в сундуке уменьшается ровно на 7, то всего игроки сделают по $289 - 240 = 49$ ходов.

3. Докажем, что Билли не сможет набрать 172 монеты. Так как перед ходом Билли число монет в сундуке кратно 7, то Билли не сможет взять остаток от деления на 7. Поэтому он никогда не возьмёт 6 монет.

Пусть перед ходом Билли в сундуке $7\,k$ монет.

Билли сможет взять 5 монет, если $7\,k \equiv 5 \pmod 6 \Leftrightarrow k \equiv 5 \pmod 6 \Leftrightarrow k \in \{245, 251, \ldots, 287\}$. То есть не более, чем $(287-245)/6+1 = 8$ раз.

Билли сможет взять 4 монеты, если $7\,k \equiv 4 \pmod 5 \Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod 5 \Leftrightarrow k \in \{242, 247, \ldots, 287\}$. То есть не более, чем $(287-242)/5+1 = 10$ раз. Но при $k = 287$ и $k = 257$ Билли выгоднее брать по 5 монет. Поэтому 4 монеты Билли возьмёт не более 8 раз.

Далее будем рассуждать грубее:

3 монеты можно взять не более $\lfloor 49/4 \rfloor + 1 = 13$ раз.

2 монеты можно взять не более $\lfloor 49/3 \rfloor + 1 = 17$ раз.

1 монеты можно взять не более $\lfloor 49/2 \rfloor + 1 = 25$ раз.

Поэтому Билли не сможет взять более, чем

$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 17 + 1 \cdot 25 = 170$$

монет, что меньше, чем требуемые 172 монеты.

Замечание. Если для 3, 2 и 1 монеты произвести точную оценку (с использованием КТО), то можно показать, что Билли не может набрать более 165 монет.

Кроме того, можно перебрать все 49 ходов и посмотреть, какое наибольшее число монет может получить Билли за каждый ход, просуммировать и получить 165.

Внезапно. Если в конце игры Флинт немного изменит стратегию, то он сможет забрать у Билла ещё 2 монеты. Но это уже совсем другая история...

Критерий. Полное решение — 7 баллов. Указана правильная стратегия Флинта, но не доказана, что она выигрышная — 3 балла.