Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
14 октября 2023 года
5 класс

Решения

1. Ответ: 3. Решение:

$a\,\Omega\,b = (a \cdot b - 2) \cdot 3 - a - b.$

$x\,\Omega\,5 = (4\,\Omega\,4) - x$

$(x \cdot 5 - 2) \cdot 3 - x - 5 = (4\,\Omega\,4) - x$

$(x \cdot 5 - 2) \cdot 3 - x - 5 = (4 \cdot 4 - 2) \cdot 3 - 4 - 4 - x$

$15 \cdot x - 6 - 5 = 48 - 6 - 4 - 4$

$15 \cdot x - 11 = 34$

$15x = 45$

$x = 3$

Критерии: Только ответ - 2б; Правильно преобразовано выражение в уравнении (избавился от омеги) 2б; Серьезная ошибка на начальном этапе преобразований - не более 3б; Арифметическая ошибка в конце преобразований - 5б; Найден ответ, но преобразования не доведены до конца - 6б.

2. Ответ: 83. Решение: Рассмотрев 3 проекции, можно понять, что фигура состоит из семи кубиков, расположенных определенным образом (см. рис.4). Чтобы минимизировать сумму чисел на видимых гранях, возьмем семь кубиков с наименьшими числами на гранях (то есть это будут кубики с числами 1, 2, 3, ... 7). Нужно расставить их следующим образом: чем больше у кубика числа на гранях, тем меньше видимых граней должно быть. Кубик с наибольшими числами на гранях (7) нужно поставить как показано на рис.1 В этой позиции он имеет одну видимую грань (наименьшее возможное количество). Для кубиков с числами 5 и 6 есть два возможных места, в каждом из которых у них по 3 видимые грани (рис. 2). Так же два места есть для кубиков 3 и 4 (рис. 3) - в этих позициях у кубиков по 4 видимых грани. Остались две позиции, в которых кубики имеют по 5 видимых граней - туда поместим кубики с числами 1 и 2. Заметим, что Карлсон рассматривает башенку со всех сторон, а не только слева, сверху, сзади и спереди, но поскольку башенка стоит на полу, снизу ее не рассмотреть. Минимальная сумма $7 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 5 = 83$

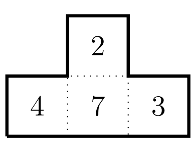


рис. 1

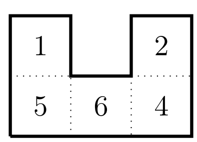


рис. 2

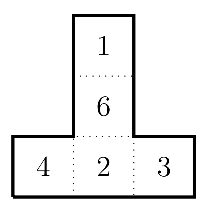


рис. 3

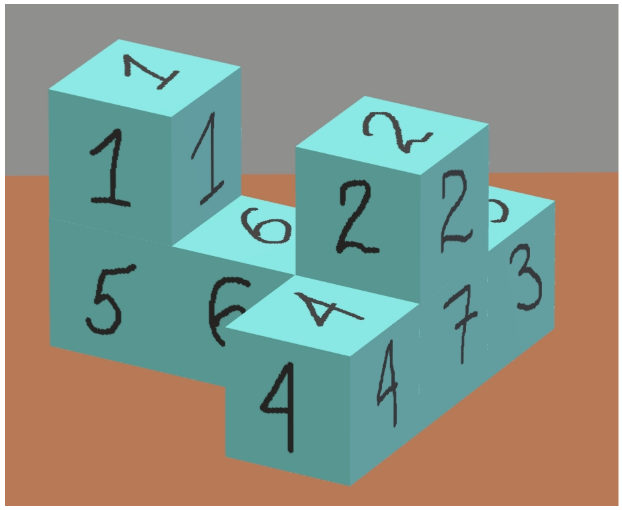


рис. 4

Критерии: Озвучена мысль, что чем больше видимых граней у кубика, тем меньше число на гранях этого кубика - 1б; Верно определено количество кубиков или верно указаны проекции - 2б; Верный ответ без пояснений - 2б; Часть кубиков расположено неверно и неправильный ответ - не более 3б за решение; Все верно, но ответ 80, так как не учетно по одной видимой грани у кубиков с числами 1 и 2 - 4 балла; Верные рассуждения и ответ, но нет ничего из нижеперечисленного - 5 баллов:

-правильно обозначено строение башни, посчитано сколько граней будут видны у каждого кубика

-нарисованы проекции башни и приведен пример расположения кубиков

Дан верный пример, правильно посчитана сумма, но не очевидна минимальность - 6 баллов

Все верно, но допущена арифметическая ошибка - 6 баллов

3. Ответ: Может. Пример: возьмем 5 гномов, назовем их А, Б, В, Г, Д. Тогда можно составить 5 бригад так, чтобы хотя бы в одной из них бригадир гарантированно оказывается средним по возрасту. Например, создадим бригады (А, Б, В), (Б, В, Г), (В, Г, Д), (Г, Д, А) и (Д, А, Б) а бригадиром назначим второго в каждой тройке. Докажем от противного, что в приведенном примере точно найдется тройка, где бригадир - средний по возрасту. Предположим, что в нашем примере из 5 бригад не нашлось ни одной, в которой бригадир средний по возрасту. Тогда, не умаляя общности, пусть

А старше Б, значит В тоже старше Б.

Б младше В, значит Г тоже младше В.

В старше Г, значит Д тоже старше Г.

Г младше Д, значит А тоже младше Д.

Д старше А, а А старше Б по нашему предположению и следовательно А — средний по возрасту в последней бригаде. Противоречие.

Критерии: Только ответ да, можно, - 0б

4. Ответ: $24, 39$ Решение: Пусть на доске было записано число A, а первому сказали число B. Так как он смог определить оставшиеся два числа, то A/B однозначно раскладывается на произведение каких-то двух натуральных чисел, значит A/B — простое число.(В противном случае A/B можно было бы разложить на множители уже как минимум двумя разными способами - как произведение множителей составного числа или как произведение 1 и A/B. Значит одному из оставшихся мудрецов сообщили простое число (или единицу), а другому сообщили число 1. Второй сказал, что его число наименьшее из всех, значит 1 точно у него. Третий мудрец сказал, что число первого на 10 больше, чем его число, значит мудрецам сообщили следующие числа: первому - $p+10$, второму - 1, третьему - p. (Заметим, что p не может быть равно 1 так как в этом случае первый мудрец бы знал у кого какие числа, а по условию задачи этого он не знает, значит p - простое). При $p = 2$ ответ 24, он подходит, при $p = 3$ ответ 39 - он тоже подходит, а при p больше 3 ответы будут $\geq 15 \cdot 5 \geq 75$, что уже больше 70, следовательно других ответов нет.

Критерии: В решении никак не учтено то, что первый мудрец смог узнать числа двух других в следствие этого в ответе - лишний вариант, объяснения нет, или объяснение того, как "решение"находилось подбором - 0 баллов

Только правильные ответы - 1 балл

Есть рассуждения про простые числа, но в процессе допущена логическая ошибка и дан неверный ответ - 2 балл

Верные рассуждения про простые числа, но более одной ошибки в ответе - 3 балла

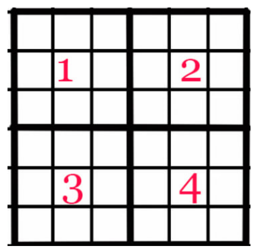
Верные рассуждения про простые числа, но потерян случай или 1 лишний ответ - 5 баллов

В решении подразумевается, что произведение второго и третьего - простое число, но об этом ничего не сказано - 5 баллов

Верный ответ, правильная идея, но в решении допущены незначительные логические ошибки - 5 баллов

5. Ответ: для $N = 4$. Решение: Докажем, что нельзя гарантировать, что простреленных клеток будет больше четырех. Разделим доску 6×6 на 4 квадрата 3×3. Заметим, что у каждого из этих квадратов есть «центральная клетка», всего их 4. Каждая клетка, кроме центральных граничит по стороне или углу ровно с одной центральной. Следовательно, может так получиться, что все стрелы, которые Леголас выпускал в квадраты 1, 2, 3 и 4 будут попадать в их центры. Значит, нельзя гарантировать попадание более чем в четыре различные клетки.

Покажем, как можно гарантировать, что простреленных клеток будет хотя бы 4. Леголас может выпустить по 10 стрел в центральные клетки каждого из четырех квадратов. Заметим, что каждая из стрел, выпущенных в центр квадрата 1, попадет в какую-то клетку квадрата 1. Так как в квадрате 1 всего 9 клеток, а выстрелов 10, значит в какую-то из его клеток попадут хотя бы дважды и она станет простреленной. Аналогично с остальными квадратами.



Критерии: Только первая часть решения - 2б; Вторая часть решения - 3б; Всё вместе - 7б Пример без объяснения - 1б.