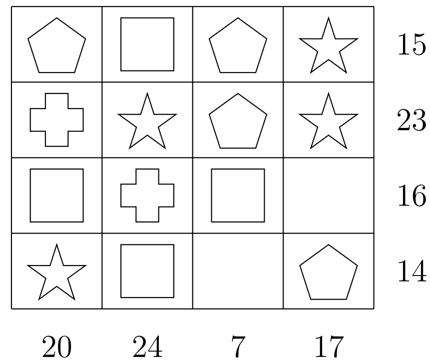
Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
4 класс

1. Каждой из четырех фигурок на картинке (квадрату, пятиугольнику, кресту и звезде) соответствует какое-то целое число. Указаны суммы этих чисел в каждой строке и в каждом столбце таблички. Приведите пример такого соответствия.



Ответ: Квадрат = 5, пятиугольник = 1, крест = 6, звезда = 8.

Критерии. Верный ответ — 7 баллов.

2. Шестнадцать орехов можно разложить в три кучки так, чтобы никакая кучка не была пустой, и ни в какой паре кучек количества орехов не были равными и не отличались на 1. Один из способов — 1, 5 и 10 орехов. Найдите все остальные способы. (Доказывать, что найдены все способы, не нужно. Способы, отличающиеся лишь порядком кучек, считаются одинаковыми.)

Ответы: 1+3+12, 1+4+11, 1+5+10 (дан в примере), 1+6+9, 2+4+10, 2+5+9, 2+6+8, 3+5+8 — всего 8 способов.

Критерии. Написаны все способы — 7 баллов.

За каждый упущенный ответ снимается по 2 балла (пока результат больше 0).

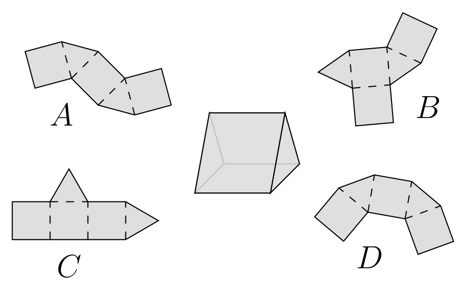
3. У Ани сегодня день рождения, ей исполнилось столько лет, сколько месяцев сейчас ее младшей сестре Тане. Ровно через полтора года возраст Ани (в месяцах) окажется втрое больше возраста Тани. На сколько месяцев Таня младше сестры?

Ответ: на 44. **Решение.** Сосчитаем возраст в месяцах. Пусть Ане $12x$, а Тане x. Через полтора года Ане будет $12x + 18$, Тане $x + 18$. По условию, $12x + 18 = 3x + 54$, откуда $9x = 36$, $x = 4$. Разница возрастов $48 - 4 = 44$ месяца.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Ответ без верного объяснения — 2 балла.

4. Из каких двух фигурок с картинки можно сложить палатку, изображённую посередине? Укажите нужные две фигурки и объясните, почему из двух других сложить палатку невозможно.



Ответ: A и B можно, C и D нельзя. В развёртке C для получения палатки самая левая сторона левого квадратика должна стыковаться с самой правой стороной правого квадратика, но справа стоит треугольник. В развёртке D нельзя, потому что, если объявить центральный квадратик дном палатки и поставить треугольные стенки, то оставшиеся квадратики будут смотреть в одну сторону (а должны в разные).

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

За каждый верный ответ — по 1 баллу, за каждое обоснование невозможности двух прочих ответов — по 2 балла. Если набраны 1+1+2+2, ставился полный балл.

5. Петя написал в первую строчку таблицы 3×7 числа от 1 до 7 — по одному числу в каждый столбец, каждое число использовалось один раз. Затем Вася вписал во вторую строчку эти же числа в каком-то другом порядке. И, наконец, Тема так же заполнил третью строчку. Оказалось, что ни в каком столбце нет одинаковых чисел. В каком наибольшем числе столбцов числа Тёмы могли оказаться меньшими, чем числа Пети и Васи?

Ответ: в пяти столбцах.

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5

Решение. Пример: см. рисунок.

Оценка: число Тёмы не может быть наименьшим, если у Пети или Васи в этом столбце находится 1. Так как это не может быть один и тот же столбец, то Тема может вписать меньшее число не более чем в $7-2=5$ столбцов.

Оценка, способ 2: число Тёмы не может оказаться наименьшим, если оно равно 6 или 7. Действительно, больших 7 чисел в принципе нет, а больше 6 только 7, но семёрка не может быть написана надо Тёминой шестёркой дважды. Получается, кандидатов на наименьшее число у Тёмы остаётся только 5.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Только оценка — 4 балла, только пример — 2 балла.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
5 класс

1. Серёжа бегает каждый понедельник и каждую среду. Известно, что вчера он не бегал, и завтра тоже не побежит. Какой сегодня день недели, если 10 дней назад Серёжа бегал?

Ответ: Суббота.

Критерии. Неправильный ответ — 0 баллов, правильный ответ — 7 баллов.

2. Вася купил прямоугольную плитку с шириной 1. Он разделил её на три части, как показано на картинке. Оказалось, что сумма периметров трёх получившихся частей в два раза больше периметра первоначального прямоугольника. Найдите длину изначальной плитки.

Решение. Сумма периметров трёх получившихся частей равна периметру изначальной плитки плюс удвоенные внутренние разрезы.

То есть периметр изначальной плитки равен 4. Следовательно, длина плитки также равна 1.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Ответ без доказательства — 0 баллов

3. Сейчас сумма цифр возраста Анны равна возрасту Тани, а через 10 лет Анна будет в 2 раза старше Тани. Сколько сейчас лет Анне, если её возраст записывается двухзначным числом?

Ответ: 26.

Решение 1. Обозначим возраст Анны за $\overline{ab}$. Тогда через десять лет возраст Анны равен $10a + b + 10$, а возраст Тани равен $a + b + 10$. Следовательно, $10a + b + 10 = 2(a + b + 10)$, откуда $8a = b + 10$. Так как $b + 10 < 19$, то получаем единственное решение $a = 2$, $b = 6$.

Решение 2. По условию, возраст Тани меньше 18 (это сумма цифр двузначного числа). Далее можно перебрать все варианты возрастов Тани.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Только ответ без доказательства или с неполным перебором — 1 балл. Правильное решение, но дан ответ не на тот вопрос — 6 баллов.

4. Петя написал в первую строчку таблицы 3×7 числа от 1 до 7 — по одному числу в каждый столбец, каждое число использовалось один раз. Затем Вася вписал во вторую строчку эти же числа в каком-то другом порядке. И, наконец, Тёма так же заполнил третью строчку. Оказалось, что ни в каком столбце нет одинаковых чисел. В каком наибольшем числе столбцов числа Тёмы могли оказаться меньшими, чем числа Пети и Васи?

Ответ: в пяти столбцах.

Решение. Пример: см. рисунок.

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5

Оценка: число Тёмы не может быть наименьшим, если у Пети или Васи в этом столбце находится 1. Так как это не может быть один и тот же столбец, то Тема может вписать меньшее число не более чем в $7 - 2 = 5$ столбцов.

Оценка, способ 2: число Тёмы не может оказаться наименьшим, если оно равно 6 или 7. Действительно, больших 7 чисел в принципе нет, а больше 6 только 7, но семёрка не может быть написана надо Тёминой шестёркой дважды. Получается, кандидатов на наименьшее число у Тёмы остаётся только 5.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Только оценка — 4 балла, только пример — 2 балла.

5. Отличница Таня заполнила таблицу 3×3 натуральными числами так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Двоечник Вася не любит цифру x и любит цифру y. Он заменил в таблице каждую цифру x на цифру y (например, если $x = 3$, а $y = 8$, то число 13 заменится на 18). В итоге получилась таблица, как на рисунке. Найдите x и y.

9	11	10
18	17	6
14	11	15

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

Решение. В табличке нет цифр 2 и 3, следовательно, $x = 2$ или $x = 3$. Также суммы чисел в каждой строке различны, а каждая цифра, кроме 1, встречается не более, чем в одной строчке. Следовательно, $y = 1$. Заметим, что сумма чисел в верхней строчке на 1 больше, чем в правом столбце. Изменить последнюю цифру в этих линиях мы можем только в числе 11. Значит, $x = 2$.

Такая табличка действительно возможна (пример на рисунке).

9	22	20
28	17	6
14	12	25

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Доказано, что $y = 1$ — 1 балл. Ответ $x = 2$, $y = 1$ с примером без доказательства отсутствия других ответов — 2 балла, без примера — 1 балл (баллы с предыдущим критерием не суммируются).

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
6 класс

1. Константин собирает квадраты из спичек. Сначала он сделал квадрат 1×1, затем, добавив восемь спичек к существующему квадрату, получил квадрат 2×2 (со всеми перегородками), и так далее. Сколько спичек понадобится добавить после квадрата со стороной 9, чтобы получить квадрат со стороной 10?

Ответ: 40 спичек.

Решение. Пусть Константин достраивает квадрат справа и снизу. Десять спичек потребуется на правую границу, десять — на нижнюю, по одной — на верхнюю и левую границы, по девять — на горизонтальные и на вертикальные перегородки.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Ответ без достаточного обоснования — 5 баллов.

2. В фирме «Рога и копыта» 150 сотрудников, и у всех разная зарплата. Некоторые из сотрудников всегда говорят правду, остальные всегда врут. Всем сотрудникам задали два вопроса: «Относитесь ли вы к сотне наиболее высокооплачиваемых сотрудников фирмы?» и «Относитесь ли вы к сотне самых низкооплачиваемых сотрудников?». На каждый из них было дано ровно 100 утвердительных ответов. Врал ли при опросе 70-й по зарплате (начиная с самых высокооплачиваемых) сотрудник?

Ответ: нет, не врал.

Решение. Разделим сотрудников на три группы по 50 человек, где в первой группе сотрудники с самой высокой зарплатой, а в последней — сотрудники с самой низкой зарплатой. Назовём эти группы богатыми, средними и бедными.

Каждый из 50 богатых, а также каждый из 50 бедных даст ровно один утвердительный ответ (независимо от того, говорит ли он правду или лжёт). Значит, они в сумме дадут 100 утвердительных ответов, а тогда остальные 100 утвердительных ответов приходятся на 50 средних. Заметим, что говорящий правду из группы средних даст два утвердительных ответа, а лжец — ноль утвердительных ответов.

Следовательно, каждый из 50 средних (и 70-й в частности) говорит правду.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Задача решена с условием, что суммарно 100 утвердительных ответов, а не по 100 — не более 5 баллов

3. Ян собирается написать на доску строку из символов «+» и «−». Далее под каждыми двумя соседними символами записывается «+», если они одинаковы, и «−», если разные. Под новой строкой пишется по такому же правилу ещё строка и т. д., пока в очередной строке не будет лишь один символ (пример того, что может получиться, изображен на картинке). Сколькими способами Ян может написать строку из 11 символов, чтобы получить в итоге «+»?

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ & - & & - & & - & \\ & & + & & + & & \\ & & & + & & & \end{array}$$

Ответ: $2^{10} = 1024$.

Решение. Всего есть 2^{11} вариантов расставить плюсы и минусы в верхней строке. При каждой такой расстановке знаки всех остальных строчек определяются однозначно.

Заменим последний символ верхней строки на противоположный, не меняя остальные. Тогда на противоположный символ заменятся все последние символы в каждой строке, т.е. и верхний тоже. Значит, требуемых расстановок — ровно половина от общего количества.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Верный ответ — 1 балл. доказательство, что при увеличении таблицы на одну строчку количество вариантов становится в 2 раза больше — 5 баллов.

4. Отличница Таня заполнила таблицу 3×3 натуральными числами так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце одна и та же. Двоечник Вася не любит цифру x и любит цифру y. Он заменил в таблице каждую цифру x на цифру y (например, если $x = 3$, а $y = 8$, то число 13 заменится на 18). В итоге получилась таблица, как на рисунке. Найдите x и y.

9	11	10
18	17	6
14	11	15

Ответ: $x = 2$, $y = 1$.

Решение. В табличке нет цифр 2 и 3, следовательно, $x = 2$ или $x = 3$. Также суммы чисел в каждой строке различны, а каждая цифра, кроме 1, встречается не более, чем в одной строчке. Следовательно, $y = 1$. Заметим, что сумма чисел в верхней строчке на 1 больше, чем в правом столбце. Изменить последнюю цифру в этих линиях мы можем только в числе 11. Значит, $x = 2$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Верный ответ — 1 балл. Доказательство что $x = 2$ — 2 балла (суммируется с преддыдущим критерием). доказательство что $y = 1$ — 2 балла (суммируется с предыдущими критериями).

5. Каждый из десяти шахматистов сыграл **ровно две игры** с каждым другим. За победу даётся 2 очка, за поражение 0; за ничью оба игрока получают по 1 очку. После турнира один из игроков позвонил маме и сказал, сколько очков он набрал. При каком наименьшем услышанном числе мама может быть уверена, что её сын в тройке победителей (то есть что все остальные игроки, кроме, может, двоих, набрали меньше очков)?

Ответ: 31 очко.

Решение. Пусть четыре лидера обыграли всех, и у них по 24 очка с остальными. Ещё 24 очка они разыграли между собой. И если каждый набрал в этих партиях по 6 очков (это может быть, если они все партии между собой сыграли вничью), то никто из них не входит в тройку лидеров. Значит, 30 очков недостаточно.

Это же рассуждение показывает, что 31 очка достаточно — четвёрка лидеров не может иметь в сумме более $24 \cdot 4 + 24 = 120$ очков.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
7 класс

1. Можно ли из тысячи равных прямоугольников с периметром 1000 сложить прямоугольник с периметром 1100?

Ответ: Да, можно.

Решение. Можно взять 1000 одинаковых прямоугольников с шириной $\frac{50}{999}$ и длиной $499\frac{949}{999}$ и приложить их длинными сторонами друг к другу.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Не написано, как собирается большой прямоугольник из маленьких — 5 баллов.

Описана конструкция, но не приведены длины сторон — не более 3 баллов.

Фраза «положим друг на друга» без дальнейших обоснований — 0 баллов

2. В фирме «Рога и копыта» 150 сотрудников, и у всех разная зарплата. Некоторые из сотрудников всегда говорят правду, остальные всегда врут. Всем сотрудникам задали два вопроса: «Относитесь ли вы к сотне наиболее высокооплачиваемых сотрудников фирмы?» и «Относитесь ли вы к сотне самых низкооплачиваемых сотрудников?». На каждый из них было дано по крайней мере 100 утвердительных ответов. Врал ли при опросе 70-й по зарплате (начиная с самых высокооплачиваемых) сотрудник?

Ответ: нет, не врал.

Решение. Разделим сотрудников на три группы по 50 человек, где в первой группе сотрудники с самой высокой зарплатой, а в последней — сотрудники с самой низкой зарплатой. Назовём эти группы богатыми, средними и бедными.

Каждый из 50 богатых, а также каждый из 50 бедных даст ровно один утвердительный ответ (независимо от того, говорит ли он правду или лжёт). Значит, они в сумме дадут 100 утвердительных ответов, а тогда остальные 100 утвердительных ответов приходятся на 50 средних. Заметим, что говорящий правду из группы средних даст два утвердительных ответа, а лжец — ноль утвердительных ответов.

Следовательно, каждый из 50 средних (и 70-й в частности) говорит правду.

Критерии. Верное решение — 7 баллов.

Решение на частном случае зарплат — не больше 3 баллов.

3. Ира хочет найти такие целые $x, y, z > 1$, чтобы выполнялось равенство

$$2022! = 2^x + 3^y + 5^z.$$

Докажите, что у неё это не получится.

Напомним, что символом $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Решение. Смотрим по модулю 4: 2^x даёт нулевой остаток, 5^z — всегда остаток 1, а 3^y — остаток 3 при нечётном y и остаток 1 — при чётном. Получаем, что y нечётно. Смотрим по модулю 5, аналогично получаем, что x нечётно. Смотрим по модулю 3 и получаем, что z чётно. Наконец, смотрим по модулю 8 и получаем противоречие: 2^x даёт нулевой остаток, 3^y — остаток 3 (при нечётном y), 5^z — остаток 1 (при чётном z). Противоречие.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

За получение чётности/нечётности какого-либо числа — 2 балла за каждое.

4. На доске 45×45 провели 11 разрезов по линиям сетки (все разрезы идут от края до края). Оказалось, что среди получившихся прямоугольников нет двух одинаковых. Докажите, что среди них есть квадрат.

Решение. Заметим, что 11 разрезов сделают 13 частей на сторонах. Некоторые из них горизонтальные, а остальные вертикальные. Если есть два одинаковых горизонтальных (или вертикальных) отрезка имеют одинаковую длину, у нас образуются равные прямоугольники. Если один из горизонтальных отрезков равен какому-то вертикальному, то на их пересечении образуется квадрат (мы допустим противное и предположим, что квадратов нет). Если нет ни того, ни другого, то все эти 13 отрезков должны иметь разную длину. Но минимальная длина 13 отрезков разной длины — сумма чисел от 1 до 13, а это 91, что больше 90 (сумма длин двух боковых сторон).

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Леонард переехал в новый дом и заметил, что в каждой комнате не менее трёх ламп. При этом каждый выключатель меняет состояние ровно двух ламп, и каждая лампа подключена ровно к одному выключателю. Докажите, что независимо от начального состояния ламп Леонард сможет так нажать на выключатели, чтобы в каждой комнате были как включённые, так и выключенные лампы.

Решение 1. Назовём однотонной комнату с только включенными или выключенными лампами.

Научимся уменьшать количество однотонных комнат за какое-то количество действий. Выберем произвольную однотонную комнату A. Изменим состояние выключателя, относящегося к любой лампе в этой комнате. Если вторая лампа в этой же комнате, то количество однотонных уменьшилось.

Рассмотрим случай, когда лампа в другой комнате B. Нас не устраивает вариант, когда комната B стала однотонной. В таком случае, повторим наши действия. Выберем другой выключатель комнаты B и поменяем его состояние. Комната B перестала быть однотонной, но, возможно, какая-то другая комната C стала однотонной. Поменяем состояние выключателя в выключателе другой лампочки в комнате C, и т.д.

Либо мы на каком-то шаге уменьшим количество однотонных комнат, либо придём к комнате X, в которой уже переключали свет. Если $X \neq A$, то по нашему алгоритму в X уже была одна включенная и одна выключенная лампочка, а мы изменили состояние третьей лампочки, и значит, не могли сделать X однотонной. Аналогично если $X = A$: мы меняли состояние одной лампы в изначально однотонной комнате, а сейчас изменили состояние ещё одной.

Действуя по указанному алгоритму, мы всегда можем уменьшить количество однотонных комнат, пока они существуют. Значит, можем добиться и полного их исчезновения.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
8 класс

1. В фирме «Рога и копыта» 150 сотрудников, и у всех разная зарплата. Некоторые из сотрудников всегда говорят правду, остальные всегда врут. Всем сотрудникам задали два вопроса: «Относитесь ли вы к сотне наиболее высокооплачиваемых сотрудников фирмы?» и «Относитесь ли вы к сотне самых низкооплачиваемых сотрудников?». На каждый из них было дано по крайней мере 100 утвердительных ответов. Врал ли при опросе 70-й по зарплате (начиная с самых высокооплачиваемых) сотрудник?

Решение 1. Предположим, что 70-й сотрудник лжец. Тогда, чтобы набрать 100 утвердительных ответов на первый вопрос, среди сотрудников с номерами из $[101;150]$ должен быть ещё один лжец. Тогда в диапазоне $[50;150]$ уже два лжеца. Тогда, чтобы набрать 100 утвердительных ответов на второй вопрос, среди сотрудников с номерами из $[1;50]$ должно быть два лжеца. Следовательно, в диапазоне $[1;100]$ уже три лжеца. Продолжая так рассуждать, приходим к ситуации, когда в диапазонах $[1;50]$ и $[101;150]$ все лжецы. Так как 70-й тоже лжец, то в этом случае на оба вопроса мы получим не более 99 утвердительных ответов. Противоречие. Следовательно, 70-й сотрудник говорит правду. Пример: $[1;50]$ — лжецы, $[51;100]$ — правдивцы, $[101;150]$ — лжецы.

Решение 2. Разделим сотрудников на три группы по 50 человек, где в первой группе сотрудники с самой высокой зарплатой, а в последней — сотрудники с самой низкой зарплатой. Назовём эти группы богатыми, средними и бедными.

Каждый из 50 богатых, а также каждый из 50 бедных даст ровно один утвердительный ответ (независимо от того, говорит ли он правду или лжёт). Значит, они в сумме дадут 100 утвердительных ответов, а тогда остальные 100 утвердительных ответов приходятся на 50 средних. Заметим, что говорящий правду из группы средних даст два утвердительных ответа, а лжец — ноль утвердительных ответов.

Следовательно, каждый из 50 средних (и 70-й в частности) говорит правду.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Разобран случай «70-й сотрудник лжец», но не приведён пример для случая, когда 70-й сотрудник правдивец, — 5 баллов.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle BAC = 41°$, $\angle DAC = 8°$, $\angle ABD = 82°$, $\angle CBD = 16°$. Докажите, что $ABCD$ — это трапеция.

Решение 1. Треугольники ABC и ABD равнобедренные (счет углов). Следовательно, B — центр окружности, описанной вокруг ACD, а еще так как высота в треугольнике CBD является и биссектрисой, то угол между AB и этой высотой — прямой, поэтому AB параллельно CD.

Решение 2. Треугольники ABC и ABD равнобедренные: $AB = BC = BD$. Следовательно, треугольник BCD тоже равнобедренный, откуда $\angle BDC = 82°$, что равно $\angle ABD$, и влечет параллельность AB и CD.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

3. Пять различных чисел a, b, c, d, e таковы, что

$$\frac{e-c}{b-a} = \frac{a-d}{c-b} = \frac{b-e}{d-c} = \frac{d-b}{a-e}.$$

Докажите, что $\frac{c-a}{e-d} = \frac{e-c}{b-a}$.

Решение. Пусть $\frac{e-c}{b-a} = x$. Тогда

$$e - c = x\,b - x\,a,\ \ a - d = x\,c - x\,b,\ \ b - e = x\,d - x\,c,\ \ d - b = x\,a - x\,e.$$

Складывая все эти равенства, получаем, что

$$a - c = x\,d - x\,e.$$

Следовательно, $x = \frac{a-c}{d-e} = \frac{c-a}{e-d}$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Остальное — 0 баллов.

4. Два автомобиля одновременно выехали из пункта A в пункт B. Первый автомобиль всегда ехал с постоянной скоростью. Водитель второго автомобиля разбил весь путь на 999 равных по длине участков и увеличивал свою скорость на одну и ту же величину, как только проезжал очередной участок. Оказалось, что скорость первого автомобиля равнялась скорости второго автомобиля на 500-м участке. Какой автомобиль раньше прибыл в пункт B?

Решение. Пусть скорость первого автомобиля равна v, величина, на которую второй увеличивал скорость, равна $a > 0$, а длина одного участка равна s. Тогда первый потратит на весь путь время $t_1 = \frac{999\,s}{v}$, а второй —

$$t_2 = \frac{s}{v - 499\,a} + \frac{s}{v - 498\,a} + \dots + \frac{s}{v} + \dots + \frac{s}{v + 498\,a} + \frac{s}{v + 499\,a}.$$

Пусть $x > 0$. Тогда

$$\frac{s}{v-x} + \frac{s}{v+x} = \frac{s(v+x+v-x)}{v^2 - x^2} = \frac{2\,s}{v - x^2/v} > \frac{2\,s}{v}.$$

Следовательно,

$$t_2 = \left(\frac{s}{v - 499\,a} + \frac{s}{v + 499\,a}\right) + \dots + \left(\frac{s}{v-a} + \frac{s}{v+a}\right) + \frac{s}{v} > 499\frac{2\,s}{v} + \frac{s}{v} = t_1.$$

Поэтому первый автомобиль приедет в пункт B раньше второго.

Также можно воспользоваться тем, что среднее арифметическое больше среднего гармонического:

$$\frac{999}{\frac{s}{v-499\,a} + \dots + \frac{s}{v+499\,a}} < \frac{\frac{v-499\,a}{s} + \dots + \frac{v+499\,a}{s}}{999} = \frac{v}{s}.$$

Следовательно, $t_2 > \frac{999\,s}{v} = t_1$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Выписаны формулы для t_1 и t_2 — 1 балл.

5. На доске написано число 155520. Два игрока ходят по очереди. За ход можно написанное на доске число умножить на $\frac{p}{q}$, где $p > q$, и p и q — простые делители написанного на доске числа. Результат умножения записывается поверх старого. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

Решение. $155520 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5$. Поэтому на доске всегда будет написано число вида $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$. По условию разрешаются ходы:

$$(a,b,c) \to (a-1, b+1, c), \quad (a,b,c) \to (a-1, b, c+1), \quad (a,b,c) \to (a, b-1, c+1).$$

Первый игрок первым ходом умножает число на $\frac{3}{2}$. В результате, после его первого хода степени двойки и тройки станут чётными. После хода второго игрока для чётности степеней двойки и тройки будут возможны три варианта: (Н, Н), (Н, Ч), (Ч, Н). Одна из степеней всегда будет нечётной. Поэтому Первый сможет сделать ход. Более того, Первый сможет сделать так, чтобы после его хода степени двойки и тройки вновь оказались чётными. Таким образом, первый не проиграет. Значит проиграет Второй.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
9 класс

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$ имеет два корня a и b. А квадратный трёхчлен $x^2 - p^2x + q^2$ имеет корни a^2 и b^2. Найдите все такие квадратные трёхчлены или докажите, что их нет.

Решение. Заметим, что $a + b = p$, $a^2 + b^2 = p^2 = (a + b)^2 = p^2 + 2ab = p^2 + 2q$, откуда $q = 0$. Все такие трёхчлены подходят: $x^2 - px$ имеет корни 0 и p, а трёхчлен $x^2 - p^2x$ — корни 0 и p^2.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Доказано, что $q = 0$, дальнейших продвижений нет — 3 балла.

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH и две медианы AA_1 и CC_1. Оказалось, что AA_1 — биссектриса угла HAB. Докажите, что высота AH и медиана AA_1 делят вторую медиану CC_1 на три равных отрезка.

Решение. Пусть $\angle CAH = \alpha$, тогда $\angle ACB = \angle BAC = 90^\circ - \alpha$. Значит, $\angle BAH = 90^\circ - 2\alpha$, $\angle A_1AH = 45^\circ - \alpha$, т.е. $\angle A_1AC = 45^\circ = \angle C_1CA$. Тогда $AA_1 \perp CC_1$. Обозначим за K точку пересечения AH и CC_1. Тогда треугольник C_1AK равнобедренный (в нём биссектриса является высотой). Пусть M — точка пересечения медиан ABC. Мы получили, что $C_1M = KM$. Так как C_1M — треть всей медианы CC_1, получаем требуемое.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Разобрано равенство только одной пары отрезков (не использовано свойство медианы) — 4 балла.

3. Пять различных чисел a, b, c, d, e таковы, что

$$\frac{e-c}{b-a} = \frac{a-d}{c-b} = \frac{b-e}{d-c} = \frac{d-b}{a-e}.$$

Докажите, что $\frac{c-a}{e-d}$ равно тому же самому значению, и найдите это значение.

Решение. Обозначим $\frac{e-c}{b-a} = \frac{a-d}{c-b} = \frac{b-e}{d-c} = \frac{d-b}{a-e} = x$. Имеем равенства $e - c = x(b - a)$ и т.д. Сложив их, получим требуемое пятое равенство.

Теперь запишем несколько равенств и следствий из них.

$$e = b - x(d - c);$$
$$a = d + x(c - b);$$
$$e - c = x(b - a);$$
$$b - x(d - c) - c = x(b - d - x(c - b);$$
$$b - c = x(d - c + b - d - x(c - b);$$
$$b - c = x(b - c)(1 - x).$$

Так как $b - c \neq 0$ (оно стоит в знаменателе), то $1 = x - x^2$, откуда $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Заметим, что оба варианта подходят.

$$k = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \qquad a = 0, b = 1, c = \sqrt{5}, d = 2, e = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

$$k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \qquad a = 0, b = 1, c = -\sqrt{5}, d = 2, e = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Каждая из частей оценивается в 3 балла (7 баллов ставится, если сделаны обе).

4. На доске написано число $900\dots0$ (1000 нулей после девятки). Два игрока ходят по очереди. За один ход написанное на доске число можно умножить на $\frac{p}{q^2}$, где p и q — различные простые делители написанного на доске числа. Результат умножения должен оказаться целым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

Замечание. В первоначальном варианте условий не было написано, что p и q должны быть различными. Вскоре после начала олимпиады на сайте появился комментарий о том, что p и q различны, но к сожалению, его увидели не все участники.

Решение для различных p и q. Выиграет первый (здесь мы считаем, что $p \neq q$). Первым ходом нужно сделать число 2000... или 500... Затем парой ходов (второй + первый) убирается один ноль из записи числа. Делаем так, пока не получим $2^4 \cdot 5^5$ (или наоборот, $2^5 \cdot 5^4$; в силу симметрии этот ход разбирать не будем). Теперь соперник может получить $2^2 \cdot 5^6$ (отвечаем умножением на $5/4$) или $2^5 \cdot 5^3$ (тогда мы получаем $2^6 \cdot 5$, единственный ответ соперника — получить $2^4 \cdot 5^2$, и мы заканчиваем игру).

Решение, если p и q могут быть одинаковыми. Выиграет второй. Заметим, что мы всегда можем сделать ход, пока число не равно 1. А значит, важна лишь чётность количества простых делителей в разложении числа $900\dots0 = 3^2 \cdot 2^{1000} \cdot 5^{1000}$. Изначально это количество равно 2002 (чётное), каждый игрок меняет эту чётность, а выигравший должен получить после своего хода 1 (т.е. чётное число простых делителей). Следовательно, выиграет второй, и результат игры не зависит от стратегии игроков.

Критерии. Полное решение для $p \neq q$ — 7 баллов.

Полное решение для случая, когда p и q могли быть одинаковыми — 3 балла.

5. В стране 99 городов, и каждые два соединены прямой авиалинией. Цена перелёта между двумя городами фиксирована и составляет либо 1000, либо 2000 рублей. Сумма цен на билеты из каждого города не меньше 120000. Барон Мюнхгаузен и Вася поспорили, что барон может облететь несколько городов, не посетив ни один из них дважды, и потратить на билеты не менее 140000 рублей. Всегда ли барон сможет победить?

Решение 1. Рассмотрим граф только из ребер с ценой 2000. В нем степень каждой вершины не менее 22. Тогда рассмотрим самый длинный (по включению) набор не пересекающихся путей в графе. раз мы не можем его увеличить, вне этого набора нет ни одного ребра. Значит от каждой оставшейся вершины ведет не менее 22 ребер в этот набор путей. Если ребро ведет в конечную вершину пути, или в две подряд идущих в каком-то пути, то легко увеличить набор. Значит в путях не менее 44 ребер в сумме, чего хватает.

Решение 2. Рассмотрим граф только из ребер с ценой 2000. В нем степень каждой вершины не менее 22. Рассмотрим максимальное паросочетание в этом графе. Допустим, что оно состоит менее чем из 22 рёбер. Рассмотрим вершины, не входящие в паросочетание (их не менее 58). Степень каждой такой вершины не менее 22, и все рёбра ведут в вершины паросочетания (иначе паросочетание можно увеличить). Значит, эта вершина соединена хотя бы с одной парой вершин из паросочетания. Но таких вершин 58, а значит, найдутся две (пусть A и B), соединённые с одной и той же парой C и D. Тогда пару CD мы можем заменить на две пары AC и BD, что противоречит максимальности выбранного паросочетания.

Итак, у нас есть паросочетание на не менее чем 22 ребра. Сделаем маршрут по следующему алгоритму. Возьмём две вершины из паросочетания AB, продолжим путь по ребру стоимостью 2000 из вершины B. Если мы попадаем в вершину из паросочетания — дальше идём по ребру паросочетания, если нет — идём по ребру (возможно, стоимостью 1000) в вершину паросочетания, в которой ещё не были. После обхода всех рёбер паросочетания и смежных с ними стоимостью 2000 заканчиваем обход, посетив все остальные вершины в каком-нибудь порядке.

Решение 3. Давайте рассмотрим полный граф, в котором вершинами являются города, а на ребрах написан 0 если соответствующий перелет стоит 1000 и 1, если 2000. Тогда заметим, что условие задачи равносильно тому, что сумма ребер из каждой вершины хотя бы 21. Также заметим, что нам достаточно показать, что существует гамильтонов путь с суммой ребер хотя бы 42.

Для этого достаточно показать, что существует гамильтонов цикл с суммой хотя бы 42. Действительно, если в мы найдем такой цикл, то в нем либо нет ребра с нулем, тогда при удалении любого ребра останется путь с суммой 99, что достаточно, либо можно удалить ребро с нулем, и сумма останется прежней.

Предположим противное и рассмотрим гамильтонов цикл с наибольшей суммой ребер. По предположению она не больше 41, а значит есть ребро с нулем.

Обозначим вершины нашего цикла:$A, B, v_1, v_2, \ldots, v_{97}$,где AB — ребро с весом 0, и пусть вес ребра uv это $w(uv)$.

Тогда пусть $\deg(x)$ — сумма весов ребер, исходящих из x. Тогда заметим, что цикл $Bx_1 \ldots x_k A x_{97} \ldots x_{k+1}$ весит не больше, чем исходный, и поскольку в них все ребра кроме двух совпадают, $w(Ax_k) + w(Bx_{k+1}) \leq w(AB) + w(x_k x_{k+1}) = w(x_k x_{k+1})$ для любого $k = 1, 2, \ldots, 96$.

Тогда просуммируем эти неравенства по всем k от 1 до 96. Получим:

$$w(Ax_1) + \cdots + w(Ax_{96}) + w(Bx_2) + \cdots + w(Bx_{97}) \leq w(x_1x_2) + \cdots + w(x_{96}x_{97}).$$

Прибавляя к обеим частям неравенства $w(Ax_{97}) + w(Bx_1)$ и пользуясь тем, что $w(AB) = 0$, получаем:

$$(w(AB)+w(Ax_1)+\cdots+w(Ax_{97}))+(w(AB)+w(Bx_1)+\cdots+w(Bx_{97})) \leq w(Bx_1)+\cdots+w(x_{96}x_{97})+w(Ax_{97})+w(AB).$$

Теперь с левой стороны написана сумма $\deg(A) + \deg(B)$, которая по условию не меньше, чем 42, а справа написана сумма ребер в нашем цикле, которая по предположению не больше, чем 41. Противоречие. Значит есть цикл с суммой ребер не меньше, чем 42, а значит Мюнхгаузен всегда сможет победить в пари.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
10 класс

Условия, решения и критерии полностью совпадают с вариантом 9 класса.

Олимпиада Юношеской математической школы
Решения задач 2 отборочного тура
11 класс

1. От нечего делать Вася нашел все трёхзначные числа с суммой делителей 403. Сделайте это и Вы.

Ответ: $n = 144$ или $n = 225$.

Решение. Пусть $f(n)$ — сумма делителей числа n. Тогда заметим, что если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_l^{k_l}$,где p_i — простое, то

$$f(n) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + \dots p_2^{k_2}) \dots (1 + p_l + \dots + p_l^{k_l}).$$

Поскольку $403 = 13 \cdot 31$, в разложении числа n, для которого $f(n) = 403$, не более двух различных простых. Тогда если сомножитель один, то $403 = 1 + p + \dots + p^k$. Тогда 402 делится на p, а значит $p \in \{2, 3, 67\}$. Но ни одно из них не подходит, поскольку $1+2+\dots+2^7 = 255 < 403 < 511 = 1+2+\dots+2^8$, $1 + 3 + \dots + 3^5 = 364 < 403 < 1093 = 1 + 3 + \dots + 3^6$ и $1 + 67 = 68 < 403 < 4557 = 67^2 + 67 + 1$.

Если сомножителей 2, то $13 = 1 + p + \dots + p^k$, $31 = 1 + q + \dots + q^l$. Тогда 12 делится на p, 30 делится на q. Тогда поскольку $1 + 2 + 4 = 7 < 13 < 15 = 1 + 2 + 4 + 8$, $p = 3$,$k = 2$ тогда $q \in \{2, 5\}$. Тогда если $q = 2$, то $l = 4$, и если $q = 5$, $l = 2$, так как $1 + 2 + \dots + 2^4 = 1 = 5 + 5^2 = 31$. Тогда получаем, что $n = 144$ или $n = 225$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Верный ответ — 3 балла. Верное решение с неразобранным случаем степени простого — 6 баллов. Использование утверждения о том, что сумма делителей нечетна только у квадратов (на самом деле у чисел вида $x^2 \cdot 2^k$) — не более 3 баллов.

2. Промозглым осенним вечером Вася отыскал пять различных вещественных чисел a, b, c, d, e и с изумлением обнаружил, что

$$\frac{e-c}{b-a} = \frac{a-d}{c-b} = \frac{b-e}{d-c} = \frac{d-b}{a-e}.$$

Докажите, что когда Вася вычислит $\frac{c-a}{e-d}$, он получит тот же самый результат, и найдите этот результат.

Решение 1. Обозначим $\frac{e-c}{b-a} = \frac{a-d}{c-b} = \frac{b-e}{d-c} = \frac{d-b}{a-e} = x$. Имеем равенства $e - c = x(b - a)$ и т.д. Сложив их, получим требуемое пятое равенство.

Теперь запишем несколько равенств и следствий из них.

$$e = b - x(d - c);$$
$$a = d + x(c - b);$$
$$e - c = x(b - a);$$
$$b - x(d - c) - c = x(b - d - x(c - b);$$
$$b - c = x(d - c + b - d - x(c - b);$$
$$b - c = x(b - c)(1 - x).$$

Так как $b - c \neq 0$ (оно стоит в знаменателе), то $1 = x - x^2$, откуда $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Заметим, что оба варианта подходят.

$$k = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad a = 0, b = 1, c = \sqrt{5}, d = 2, e = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad a = 0, b = 1, c = -\sqrt{5}, d = 2, e = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Решение 2. Пусть

$$k = \frac{e-c}{b-a} = \frac{a-d}{c-b} = \frac{b-e}{d-c} = \frac{d-b}{a-e}.$$

Пусть $x_1 = b - a, x_2 = c - b, x_3 = d - c, x_4 = e - d, x_5 = a - e$. Тогда по условию $kx_1 = x_3 + x_4, kx_2 = x_4 + x_5, kx_3 = x_5 + x_1, kx_5 = x_2 + x_3$. Тогда если сложить все это равенства, получится $k(x_1 + x_2 + x_3 + x_5) = x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5$. Тогда поскольку $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, имеем $-kx_4 = -x_1 - x_2$, откуда $\frac{c-a}{e-d} = \frac{x_1+x_2}{x_4} = k$, что и требовалось доказать.

Осталось выяснить, каким может быть k. Пусть A — это матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а v — вектор из иксов, то по условию

$$Av = kv.$$

Тогда имеем уравнение

$$\det(A - kE) = 0,$$

то есть уравнение пятой степени на k. (Его можно получить, подставляя одни уравнения в другие, но так быстрее.) Оно выглядит так:

$$0 = -k^5 + 5k^3 - 5k + 2 = -(k-2)(k^2 + k - 1)^2,$$

откуда $k \in \{2, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$.

Теперь заметим, что решение для $k = 2$ имеет вид $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$, а значит поскольку сумма иксов должна быть равна 0, все иксы равны 0, что противоречит условию различности. Осталось проверить, что оставшиеся варианты для k подходят.

Примеры:

$$k = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad a = 0, b = 1, c = \sqrt{5}, d = 2, e = \frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad a = 0, b = 1, c = -\sqrt{5}, d = 2, e = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Ответ: $k = -1 + \sqrt{5}$ или $k = -1 - \sqrt{5}$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Доказательство равенства — 3 балла. Нахождение k — еще 2 балла, примеры дают еще по баллу.

3. От аллергии на содержательные задачи Вася записал шестизначное число $\overline{abcdef}$, использовав только нечётные цифры, причем числа $\overline{ab}, \overline{bc}, ...\overline{ef}$ все делятся на n. При каком наибольшем n такое возможно, если не все цифры исходного числа равны между собой?

Ответ: 13.

Решение. Оценка. Заметим, что n не может делиться на 11, потому что иначе все цифры в числе одинаковые, потому что двузначные числа делятся на 11 только если их цифры одинаковы, а значит любые две подряд идущие цифры совпадают. Также очевидно, что n не делится на 2, потому что все цифры нечетные.

Предположим, что n больше 13. Тогда в нашем числе не может быть двух подряд идущих одинаковых цифр, потому что иначе n является делителем некоторой цифры, потому что оно делит эту цифру, умноженную на 11 и при этом взаимно просто с 11, но цифра ненулевая, а значит $n \leq 9$, что противоречит предположению.

Предположим, что в числе есть две одинаковые цифры, стоящие через одну. Тогда одновременно числа $\overline{xy}$ и $\overline{yx}$ делятся на n. Тогда число $11(x + y)$ делится на n, а значит $x + y$ делится на n, а значит $n \leq 16$, так как $x + y \leq 7 + 9 = 16$. Но 15 не подходит, потому что вторая и третья цифры должны быть равны 5, что противоречит отсутствию рядом стоящих одинаковых.

Значит любые две цифры через один различные. Тогда первые три цифры различны, а значит двузначные числа, начинающиеся с них, различны. Тогда максимальное из них не меньше, чем $5n$, а значит $n \leq 19$. Также заметим, что поскольку для 17 и 19 выполняется неравенство $7n > 100$, эти три различных числа и есть n, $3n$ и $5n$, а значит четвертое двузначное число совпадает с первым, а значит числа n, $3n$ и $5n$ это $\overline{xy}$, $\overline{yz}$, и $\overline{zx}$ в каком-то порядке, но это не так ни для 17, ни для 19. Значит n не больше 13.

Пример: 139139.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Верный ответ — 3 балла.

4. В стране 99 городов, и каждые два соединены прямой авиалинией. Цена перелёта между двумя городами фиксирована и составляет либо 1000, либо 2000 рублей. Сумма цен на билеты из каждого города не меньше 120000. Барон Мюнхгаузен и Вася поспорили, что барон может облететь несколько городов, не посетив ни один из них дважды, и потратить на билеты не менее 140000 рублей. Всегда ли барон сможет победить?

Решение 1. Рассмотрим граф только из ребер с ценой 2000. В нем степень каждой вершины не менее 22. Тогда рассмотрим самый длинный (по включению) набор не пересекающихся путей в графе. раз мы не можем его увеличить, вне этого набора нет ни одного ребра. Значит от каждой оставшейся вершины ведет не менее 22 ребер в этот набор путей. Если ребро ведет в конечную вершину пути, или в две подряд идущих в каком-то пути, то легко увеличить набор. Значит в путях не менее 44 ребер в сумме, чего хватает.

Решение 2. Рассмотрим граф только из ребер с ценой 2000. В нем степень каждой вершины не менее 22. Рассмотрим максимальное паросочетание в этом графе. Допустим, что оно состоит менее чем из 22 рёбер. Рассмотрим вершины, не входящие в паросочетание (их не менее 58). Степень каждой такой вершины не менее 22, и все рёбра ведут в вершины паросочетания (иначе паросочетание можно увеличить). Значит, эта вершина соединена хотя бы с одной парой вершин из паросочетания. Но таких вершин 58, а значит, найдутся две (пусть A и B), соединённые с одной и той же парой C и D. Тогда пару CD мы можем заменить на две пары AC и BD, что противоречит максимальности выбранного паросочетания.

Итак, у нас есть паросочетание на не менее чем 22 ребра. Сделаем маршрут по следующему алгоритму. Возьмём две вершины из паросочетания AB, продолжим путь по ребру стоимостью 2000 из вершины B. Если мы попадаем в вершину из паросочетания — дальше идём по ребру паросочетания, если нет — идём по ребру (возможно, стоимостью 1000) в вершину паросочетания, в которой ещё не были. После обхода всех рёбер паросочетания и смежных с ними стоимостью 2000 заканчиваем обход, посетив все остальные вершины в каком-нибудь порядке.

Решение 3. Давайте рассмотрим полный граф, в котором вершинами являются города, а на ребрах написан 0 если соответствующий перелет стоит 1000 и 1, если 2000. Тогда заметим, что условие задачи равносильно тому, что сумма ребер из каждой вершины хотя бы 21. Также заметим, что нам достаточно показать, что существует гамильтонов путь с суммой ребер хотя бы 42.

Для этого достаточно показать, что существует гамильтонов цикл с суммой хотя бы 42. Действительно, если в мы найдем такой цикл, то в нем либо нет ребра с нулем, тогда при удалении любого ребра останется путь с суммой 99, что достаточно, либо можно удалить ребро с нулем, и сумма останется прежней.

Предположим противное и рассмотрим гамильтонов цикл с наибольшей суммой ребер. По предположению она не больше 41, а значит есть ребро с нулем.

Обозначим вершины нашего цикла:$A, B, v_1, v_2, \ldots, v_{97}$,где AB — ребро с весом 0, и пусть вес ребра uv это $w(uv)$.

Тогда пусть $\deg(x)$ — сумма весов ребер, исходящих из x. Тогда заметим, что цикл $Bx_1 \ldots x_k Ax_{97} \ldots x_{k+1}$ весит не больше, чем исходный, и поскольку в них все ребра кроме двух совпадают, $w(Ax_k) + w(Bx_{k+1}) \leq w(AB) + w(x_k x_{k+1}) = w(x_k x_{k+1})$ для любого $k = 1, 2, \ldots, 96$.

Тогда просуммируем эти неравенства по всем k от 1 до 96. Получим:

$$w(Ax_1) + \cdots + w(Ax_{96}) + w(Bx_2) + \cdots + w(Bx_{97}) \leq w(x_1x_2) + \cdots + w(x_{96}x_{97}).$$

Прибавляя к обеим частям неравенства $w(Ax_{97})+w(Bx_1)$ и пользуясь тем, что $w(AB)=0$, получаем:

$$(w(AB)+w(Ax_1)+\dots+w(Ax_{97}))+(w(AB)+w(Bx_1)+\dots+w(Bx_{97}))\le w(Bx_1)+\dots+w(x_{96}x_{97})+w(Ax_{97})+w(AB).$$

Теперь с левой стороны написана сумма $\deg(A)+\deg(B)$, которая по условию не меньше, чем 42, а справа написана сумма ребер в нашем цикле, которая по предположению не больше, чем 41. Противоречие. Значит есть цикл с суммой ребер не меньше, чем 42, а значит Мюнхгаузен всегда сможет победить в пари.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. От большой планиметрической любви Вася нашел в равностороннем треугольнике ABC точку M, такую что выражение
$$|AM|+2|BM|+2|CM|$$
минимально. Сделайте это и Вы.

Решение 1. Введём координаты: пусть вершины A, B, C имеют координаты соответственно $(0,0)$, $(\sqrt{3},1)$ и $(\sqrt{3},-1)$.

Докажем, что M должна лежать на серединном перпендикуляре к BC (т.е. на оси OX). Пусть искомая точка M имеет координаты (x,y), и пусть $y\neq 0$. Рассмотрим M' с координатами $(x,0)$. Ясно, что $|AM'|<|AM|$ (катет короче гипотенузы). Теперь достаточно доказать, что $|BM'|+|CM'|<|BM|+|CM|$. Это можно сделать по-разному. Например, заметить, что если точка M лежит на некотором эллипсе с фокусами B и C, то, исходя из выпуклости эллипса, M' будет лежать внутри этого эллипса.

Осталось рассмотреть случай, когда M лежит на OX, т.е. M имеет координаты $(x,0)$ ($0\le x\le\sqrt{3}$, т.к. точка внутри треугольника). Рассмотрим функцию $|AM|+2|BM|+2|CM|=f(x)=x+4\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2+1}$, и найдём её минимум. Заметим, что $f(0)=8$, $f(\sqrt{3}=\sqrt{3}+4<8$, поэтому точка A не является искомой точкой. Значит, мы можем продифференцировать $f(x)$ и приравнять производную к 0.

$$f'(x)=1+4\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2+1}}.$$

Умножив на (положительный) знаменатель и приравняв выражение к нулю, получим

$$\sqrt{(\sqrt{3}-x)^2+1}=4(\sqrt{3}-x).$$

Возводя обе части в квадрат, имеем $x^2-2\sqrt{3}x+4=16(x^2-2\sqrt{3}x+3)$, или $15x^2-30\sqrt{3}x+44=0$, откуда $x_{1,2}=\frac{15\sqrt{3}\pm\sqrt{15}}{15}$. Так как точка находится внутри треугольника, нам подходит $x=\frac{15\sqrt{3}-\sqrt{15}}{15}$. Эта точка характеризуется свойством $\sin\angle MBC=\sin\angle MCB=1/4$.

Решение 2. Следующая лемма является следствием формулы Тейлора.

Лемма. Пусть v,x — ненулевые вектора, и пусть $f(\varepsilon)=|v+\varepsilon x|$. Тогда при ε, стремящемся к нулю

$$f(\varepsilon)=|v|+\varepsilon(e_v,x)+o(\varepsilon)=|v|+(e_v,\varepsilon x)+o(\varepsilon),$$

где e_v – единичный вектор в направлении вектора v.

Доказательство леммы. Зададим координаты так, чтобы $e_v=(1,0)$, $v=(a,0)$, $x=(b,c)$ $(a>0)$. Тогда $f(\varepsilon)=\sqrt{(a+b\varepsilon)^2+(c\varepsilon)^2}=\sqrt{(b^2+c^2)\varepsilon^2+2ab\varepsilon+a^2}$. Разложим $f(\varepsilon)$ по формуле Тейлора. Для этого найдём производную $f(\varepsilon)$:

$$f'(\varepsilon)=\frac{2(b^2+c^2)\varepsilon+2ab}{2\sqrt{(b^2+c^2)\varepsilon^2+2ab\varepsilon+a^2}},$$

$f'(0)=b$.

Тогда $f(\varepsilon)=a+b\varepsilon+o(\varepsilon)$. Осталось заметить, что $|v|=a$, $(e_v,x)=b$.

Пусть длина стороны треугольника 1 и $S(M) = |AM| + 2|BM| + 2|CM|$.

Тогда заметим, что минимум на всей плоскости достигается внутри круга радиуса 5 с центром в центре треугольника, потому что искомая величина вне круга оказывается не меньше 10, а значит минимум не там, потому что если рассмотреть $M = A$, $S(M) = 4$.

Теперь поскольку круг — компакт, на нем достигается минимум, а значит он достигается либо в вершине, либо в некоторой точке, из которой любой малый сдвиг не уменьшает сумму.

Заметим, что при сдвиге на вектор εx, где x — вектор длины 1, а ε стремится к нулю, изменение длины равно

$$\Delta S = (e_{AM} + 2e_{BM} + 2e_{CM}, \varepsilon x) + o(\varepsilon).$$

Это выражение должно быть неотрицательно при любом направлении вектора x, следовательно вектор $e_{AM} + 2e_{BM} + 2e_{CM}$ равняется нулю.

Тогда углы между направлениями на вершины из M такие же как углы в треугольнике со сторонами $2, 2, 1$. В силу равенства углов AMB и AMC, точка M лежит на оси симметрии треугольника, проходящей через A. Очевидно, что $\angle MBC = \angle MCB = \arcsin(\frac{1}{4})$. Данные параметры единственным образом задают точку M. Разумеется, эту точку можно задать и другими способами.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Если не обосновано, что точка лежит на оси симметрии — не более 6 баллов. Любой вид дифференцирования без проверки граничных положений — минус два балла. Незавершенные выкладки, или выкладки, приводящие к неверному ответу, не оценивались.