

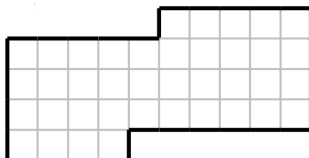


Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
7 класс

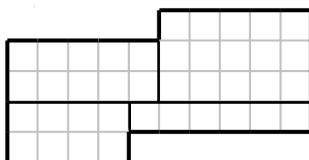


Решения

1. Разрежьте данную фигуру по линиям сетки на четыре прямоугольника, площади которых равны 6, 8, 10 и 15.



Ответ:



Критерии.

Верный пример — 7 баллов

Пример где не прямоугольники, но нормальная площадь — 1 балл

остальное — 0 баллов

2. Десять игроков соревнуются в турнире. Каждый игрок играет ровно две игры с каждым игроком. За игру победитель получает 2 очка, проигравший — 0 очков, а в случае ничьей оба получают по 1 очку. Каково минимально возможное количество очков, которое игрок должен набрать, чтобы гарантировать себе победу в турнире (т.е. он имеет больше очков, чем любой другой игрок)?

Ответ: 35 очков.

Решение. Всего максимум каждым сыграно 18 партий, а это 36 очков. Покажем, что 34 очков не достаточно. 34 очка можно набрать 2 способами: либо 17 побед и 1 поражение, либо 16 побед и 2 ничьи. Тогда как в первом, так и втором варианте есть вариант двух игроков с результатом в 34 очка. Если у кого-то есть 35 баллов, то у этого игрока должно было быть 17 побед и 1 ничья. Значит, каждый игрок проиграл хотя 1 партию, а это значит меньше $36 - 2 = 34$ очков. Получаем 35 достаточно.

Критерии.

верное решение — 7 баллов

есть арифметическая ошибка — 6 баллов

только ответ — 1 балл

3. Клетки квадрата 4×4 раскрасили в шахматном порядке. В каждую чёрную клетку записали число 0, а в каждую белую — 16. Затем с числами в квадрате четыре раза проделали следующую операцию. Для каждой клетки вычислили новое число, равное полусумме всех чисел, записанных в соседних по стороне клетках. После этого все числа стирали, а вместо них записывали эти новые вычисленные числа. Чему равна сумма всех чисел после четвёртой операции?

Ответ: 788.

Решение. Можно заметить что каждый раз на клетках одного из цветов расположены нули. А остальные клетки можно разбить на 3 группы по количеству соседей по стороне: угловые, находящиеся на стороне и центральные. Далее рассматриваем только не нулевые числа. Угловые зависят только от клеток на стороне и каждый раз от нашего действия в угол записывается число которое до этого было на стороне. На стороне сумма

всех чисел из 3 групп деленное на 2. А в центре остается сумма числа на стороне и того, что было в центре. Не нулевых чисел на стороне каждый раз 4, в углах 2, а в центре тоже 2. Далее запишем следующие числа в формате — (угловое, на стороне, центральное). $(16, 16, 16) \rightarrow (16, 24, 32) \rightarrow (24, 36, 56) \rightarrow (36, 58, 92) \rightarrow (58, 93, 150)$. Считаем сумму и получаем $2 * 58 + 93 * 4 + 150 * 2 = 788$.

Критерии.

все подсчитано верно — 7 баллов

ошибка только в финальном подсчете (арифметика) — 6 баллов

есть пример и объяснения как получить итоговую таблицу, но не посчитана сумма — 5 баллов

сделано на 1 операцию меньше и посчитано верно — 4 балла

ошибка в таблице финальной, но направление верное — 3 балла

только верный ответ — 1 балл

4. Константин Максимович закрасил на клетчатой бумаге 2023 квадратика так, что если закрашенную фигуру вырезать, то она не распадется на части. Могло ли получиться так, что у каждой закрашенной клетки нечетное число закрашенных соседей по стороне?

Ответ: Не могло.

Решение. Представим каждую клетку как вершину и соединим вершины если клетки до этого были соседями. Тогда получаем граф из 2023 вершин с нечетной степенью. Такого быть не может так как сумма степеней должна быть четная.

Критерии.

решение верное — 7 баллов

Есть идея про граф и подсчет степени, но реализовано не корректно — 3 балла

на примере получен ответ — 1 балл

5. Каждый житель острова рыцарей и лжецов является либо рыцарем и всегда говорит только правду, либо лжецом и всегда лжёт. 60 жителей этого острова собрались в круг. Жители высказывались по очереди и каждый произнес либо фразу «Следующие два говорящих человека за мной будут лжецами», либо фразу «предыдущий оратор являлся лжецом». Сколько в круге может быть лжецов?

Ответ: От 30 до 45 лжецов.

Решение. Посмотрим чтобы лжецов было больше всего. Тогда может быть чередование РЛЛЛ, всего лжецов 45 будет. Посмотрим минимальное число, тогда это вариант чередования РЛ, всего лжецов тогда будет 30. Мы можем заменить РЛЛЛР на РЛРЛР уменьшив число лжецов на 1. Значит, все варианты достижимы.

Критерии.

верное все — 3+4 баллов

объяснено почему можно получить варианты все варианты — 4 балла

есть объяснения почему подходят именно этот диапазон — 3 балла

не верно построено отрицание высказывания — 0 баллов