**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**II тур, 4 декабря 2016 года**
**11 класс. Основная аудитория**

**Сюжет 1.**
Дан произвольный треугольник $ABC$ с ортоцентром $H$. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла $B$ пересекают прямую $AC$ в точках $L$ и $K$ соответственно. Рассматриваются две окружности: $w_1$ — описанная окружность треугольника $AHC$, $w_2$ построена на отрезке $KL$, как на диаметре.

**1.1.** Пусть точка $T$ такова, что $TL$ является биссектрисой треугольника $ATC$. Докажите, что тогда $TK$ является внешней биссектрисой того же треугольника.

**1.2.** Пусть $X$ — такая точка пересечения окружностей $w_1$ и $w_2$, что $X$ и $B$ лежат по разные стороны относительно прямой $AC$. Докажите, что тогда точка $X$ лежит на высоте $BH$ треугольника $ABC$.

**Сюжет 2.**
Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. Пусть $l_P(c)$ — это количество решений уравнения $P(x) = c$. Обозначим за $A_P$ множество всех возможных значений $l_P(c)$.

**2.1.** Можно ли по $A_P$ определить степень многочлена $P$?

**2.2.** Какой наименьшей степени может быть многочлен $P$, если известно, что существует такое целое число $b$, что в $A_P$ содержатся больший и меньший чем $b$ элементы, но не содержится $b$?

**Сюжет 3.**
На столе лежит куча из $n$ камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньших. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

**3.1.** Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более чем в $\sqrt{2}$ раз. Докажите, что тогда никакую кучу нельзя разбить на три кучи.

**3.2.** Пусть похожие размеры — это те, которые отличается не более, чем вдвое. Докажите, что тогда любую кучу можно разложить на кучи по одному камню.

**Олимпиада**
**Юношеской математической школы**
**II тур, 4 декабря 2016 года**
**11 класс. Выводная аудитория**

**Сюжет 1.**
Дан произвольный треугольник $ABC$ с ортоцентром $H$. Внутренняя и внешняя биссектрисы угла $B$ пересекают прямую $AC$ в точках $L$ и $K$ соответственно. Рассматриваются две окружности: $w_1$ — описанная окружность треугольника $AHC$, $w_2$ построена на отрезке $KL$, как на диаметре.

**1.3.** Пусть $Y$ — такая точка пересечения окружностей $w_1$ и $w_2$, что точки $Y$ и $B$ лежат по одно сторону относительно прямой $AC$. Докажите, что точка $Y$ лежит на медиане $BM$.

**1.4.** Докажите, что касательная к окружности $w_1$ в точке пересечения с медианой $BM$ пересекает прямую $AC$ в середине отрезка $KL$.

**Сюжет 2.**
Дан многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. Пусть $l_P(c)$ — это количество решений уравнения $P(x) = c$. Обозначим за $A_P$ множество всех возможных значений $l_P(c)$.

**2.3.** Могут ли наименьший и наибольший элементы множества $A_P$ быть разной чётности?

**2.4.** Пусть $P$ — некоторый многочлен степени 8. Какое минимальное количество чисел нечётных может быть в множестве $A_P$, если известно, что число 8 в нем содержится?

**Сюжет 3.**
На столе лежит куча из $n$ камней. За ход можно разбить любую из имеющихся куч на две меньших. При этом размеры любых двух куч, находящихся на столе одновременно, должны быть «похожими».

**3.3.** Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются не более, чем в $k$ раз. Существует ли такое $k < 2$, что для любого, сколь угодно большого $M$ можно подобрать размер изначальной кучи таким образом, что её можно будет разбить на $M$ куч?

**3.4.** Пусть похожие размеры — это те, которые отличаются строго меньше, чем в 2 раза. На какое наибольшее количество кучек можно разбить кучу размера 660?