Решение Заочного тура «Олимпиады ЮМШ–2011» для 5–6 классов

1. Число называется перевертышем, если оно не меняется, когда его цифры переставляют в обратном порядке. Может ли сумма двух трехзначных перевертышей быть четырехзначным перевертышем? Объясните свой ответ.

   РЕШЕНИЕ:Да, такое возможно. Например, $999 + 222 = 1221$.
   Максимум — 3 балла.

2. У Шурика, Эрика, Юрика и Ярика спросили, кто из них самый младший. Шурик ответил: «Уж точно не я». Эрик подхватил: «И не я!». Юрик сказал, что младший Эрик, а Ярик указал на Юрика. Только один из них сказал правду. Кто же самый младший?

   РЕШЕНИЕ: Заметим, что из Шурика и Эрика хотя бы один говорит правду (они оба не могут быть самыми младшими). Тогда Юрик и Ярик лгут (ведь сказавший правду только один). Так как Юрик, говоря про Эрика, обманывает, то сам Эрик, говорит правду (младший не он), значит (т.к. правду сказал всего один), Шурик обманывает, поэтому младший именно он.
   Максимум — 5 баллов.

3. Учитель обвел черной ручкой на клетчатом листе бумаги прямоугольник 6×7 клеток. Ваня хочет нарисовать внутри него синий квадратик, а внутри синего — красный квадратик. При этом все прямоугольники рисуются по клеточкам, а обводить уже нарисованные линии нельзя. Сколько разных картинок у него может получиться?

   РЕШЕНИЕ: Есть 6 способов нарисовать по правилам синий квадратик 3×3, в этом случае красный квадрат 1×1 дорисовывается однозначно (в центральную клетку синего). Кроме того, есть 2 способа нарисовать синий квадрат 4×4, в каждом из этих случаев есть 5 способов нарисовать внутри него красный квадрат — либо центральный квадрат 2×2 (1 способ), либо квадрат 1×1 в любой из 4 центральных клеток — ещё 4 способа. Итого получаем $6 + 2 \cdot 5 = 16$ способов.
   Максимум — 6 баллов.
   Комментарий: Правильно нарисованные 16 картинок засчитывались как полное решение.

4. Винни-Пух съедает в будний день по килограмму меда, в субботу — по 2 кг, в воскресенье — по 5 кг. В новогоднюю ночь Винни-Пух с интересом обнаружил, что за год им съедено 629 кг любимого продукта. Рассвет какого дня недели сменит новогоднюю ночь? Объясните свой ответ.

   РЕШЕНИЕ: За неделю Винни съедает $5 \cdot 1 + 2 + 5 = 12$ кг мёда. Год (365 или 366 дней) это 52 недели и 1-2 дня. Таким образом, в последние 1-2 дня Винни съел $629 - 52 \cdot 12 = 5$ кг мёда, что возможно только в случае одного воскресенья. Таким образом, ответ — понедельник.
   Максимум — 6 баллов.

5. У двух малышей есть два одинаковых набора из 36 кубиков. Вася разложил их на семь кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики одинаковые. Гена разложил свои кубики на пять кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики разные. Докажите, что кто-то из них ошибается.

   РЕШЕНИЕ: Утверждение Васи означает, что всего имеется не более семи различных типов кубиков (в каждой кучке — не более одного типа, но кубики одинакового типа могут быть разложены и в несколько кучек). Утверждение Гены означает, что кубиков каждого типа не более пяти (в каждой из кучек Гены — не более одного кубика каждого из типов, кучек всего пять).

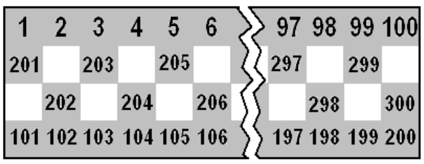
   Таким образом, если бы оба мальчика сказали правду, то общее число кубиков не могло бы быть больше, чем $7 \cdot 5 = 35$. Но так как их 36, то кто-то из мальчиков ошибся.
   Максимум — 7 баллов.

6. На бумажную ленту выписали подряд без пропусков все числа от 1 до 33 (так, что получилось одно многозначное число). После этого ленту разрезали на карточки так, что на каждой карточке оказалось число, меньшее 1000. Докажите, что произведение чисел на всех карточках делится на 32.

РЕШЕНИЕ: При выписывании в ряд чисел от 20 до 29 окажутся выписанными 5 фрагментов из трёх чётных цифр подряд: $202, 222, 242, 262, 282$. Так как лента режется на кусочки не более, чем из трёх цифр каждый, в каждом из пяти фрагментов хотя бы одна из цифр окажется последней в своём куске. Таким образом, среди разрезанных чисел будет не менее пяти чётных, т.е. делящихся на 2. Поэтому произведение полученных чисел будет делиться на $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.
Максимум — 8 баллов.

7. У Миши есть прямоугольник 4×100 клеточек. Даша закрашивает в нем клеточки в каком-то порядке. Но Миша запретил ей закрашивать клеточку, двумя или более сторонами примыкающую к уже закрашенным клеточкам. Какое наибольшее количество клеточек Даша может закрасить таким образом?

РЕШЕНИЕ: Сначала объясним, как должна действовать Даша, чтобы закрасить 300 клеток. Для этого ей достаточно закрасить сначала всю верхнюю строчку слева направо (100), потом всю нижнюю строчку слева направо (еще 100), а потом закрашивать две средних строчки слева направо в шахматном порядке (еще 100 клеток), как показано на рисунке. При этом каждый раз закрашиваемая клетка будет примыкать к ранее закрашенным не более чем одной стороной.



Теперь докажем оценку, т.е. утверждение о том, что Даше не удастся закрасить более 300 клеток. Разобьем мысленно весь прямоугольник на 100 квадратов 2×2. Заметим, что в каждом квадрате закрашено не больше трёх клеток (если в одном из квадратиков закрашены все четыре клетки, то последняя из них, когда её красили, примыкала к двум уже закрашенным клеткам этого квадратика). Значит, в сумме закрашено не более $3 \cdot 100 = 300$ клеток.
Максимум — 10 баллов.