Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН
Математико-механический факультет СПбГУ

Дорогой друг!
Юношеская Математическая Школа при СПбГУ
приглашает Вас принять участие в

Олимпиаде ЮМШ 2011 года

Мы предлагаем Вам задачи, которые непохожи на те, с которыми Вы раньше встречались в школе. Все задачи объединены в четыре сюжета. В каждом из сюжетов собраны задачи, в которых ведётся речь об одном и том же объекте. Каждая следующая задача является либо развитием результата, полученного в предыдущей, либо предложением взглянуть на объект с другой стороны. Решая последовательно поставленные задачи, Вы изучаете этот объект, понимаете, что произойдёт, если так или иначе изменить условия задачи. То есть, по сути, Вы выполняете исследовательскую работу! При этом работы, в которых один сюжет исследован полностью, будут цениться выше, чем работы, в которых сделано по одной задаче из каждого сюжета.

Помните, что решение задачи должно включать не только правильный ответ, но и полное обоснование этого ответа. Мы будем рады, если в олимпиаде примут участие Ваши друзья, которым нравится математика. Однако работы с признаками списывания и “коллективного творчества” рассматриваться не будут. Среди задач есть весьма трудные; присылайте свою работу, даже если Вам удалось решить лишь две-три задачи.

Участники, успешно выступившие в первом туре, будут приглашены на следующий тур – очный.

Задачи первого (заочного) тура для 9–11 классов

Сюжет 1

Учитель написал на доске квадратный трёхчлен x^2+px+q с целыми коэффицентами. Каждую минуту к доске подходит ученик и вычисляет корни одного из написанных на доске трёхчленов. Если они оказываются целыми, он выписывает на доску один из трёхчленов x^2+ax+b или x^2+bx+a, где a и b – только что найденные им корни.

1. При каких p и q первый выписанный учеником трёхчлен может совпасть с исходным?
2. Учитель запретил использовать любой трёхчлен для получения корней больше одного раза. Может ли в таком случае первый выписанный учеником трёхчлен не совпасть с исходным, а второй – совпасть?
3. Может ли учитель подобрать p и q так, чтобы ученик смог добиться того, чтобы в какой-то момент на доске оказались 2011 различных трёхчленов?

Сюжет 2

На лист бумаги положили картонный квадрат. Хулиган проткнул квадрат иголкой (прикрепив его к бумаге). После этого повернул квадрат вокруг иглы, нарисовав на бумаге путь каждой из вершин квадрата, а затем сам квадрат выкинул.

1. Сколько окружностей может быть нарисовано?
2. Верно ли, что всегда можно по картинке восстановить, какие две из четырёх окружностей соответствуют вершинам квадрата, расположенным по диагонали?
3. Из четырех окружностей стёрли одну. Чему равно максимальное количество вариантов дорисовать четвёртую окружность так, чтобы получившиеся окружности могли получиться вращением вершин квадрата?

Сюжет 3

В каждой клетке прямоугольной таблицы записаны 0 или 1. Под каждым столбцом написали сумму чисел в этом столбце, а справа от каждой строчки – сумму чисел в ней. Оказалось, что и в новой (нижней) строке, и в новом (правом) столбце чередуются два числа (через одно).

1. Пусть таблица имеет размер 4×4 клетки. Могут ли и в новой строке, и в новом столбце чередоваться суммы 3 и 4?
2. Известно, что и там, и там чередуются суммы 3 и 4. Какого размера в таком случае может быть таблица?
3. Пусть таблица имеет размер 103×103 клетки. Могут ли и в новой строке, и в новом столбце чередоваться суммы 100 и 3?

Сюжет 4

1. Разложите 1000000001000000001 на три натуральных множителя.
2. Докажите, что число 101...101020101...101 - составное (слева и справа от двойки поровну цифр, т.е. двойка стоит строго посередине числа)
3. Докажите, что $3^{108} - 3^{57} + 1$ - составное.

Просим Вас оформить свою работу в обыкновенной школьной тетради в клетку. На первой (белой) странице тетради (за обложкой) напишите печатными буквами без сокращений: фамилию, имя и отчество, дату рождения, контактный телефон, класс, номер и район школы, в которой Вы учитесь. Если Вы уже занимаетесь в математическом кружке, то напишите фамилию руководителя и место занятий кружка. Условия задач переписывать не нужно. Решение каждой задачи начинайте с новой страницы. Рекомендуем внимательно отнестись к правилам оформления работы. Если какие-то данные будут не указаны, или указаны неразборчиво, мы не сможем сообщить Вам результаты проверки Вашей работы.

Решения олимпиады Вы можете **с 12 по 16 декабря** (включительно) с 16:00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29.* Также Вы можете отправить свою работу по почте **до 16 декабря** на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ* или по электронной почте.

Веб-сайт: `http://yumsh.spbu.ru`

E-mail: `olymp@yumsh.spbu.ru`

Результаты заочного тура олимпиады и информация о проведении очного тура будут опубликованы на сайте и переданы в школы в середине января 2012 г.