Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 17 декабря 2017 года
11 класс. Основная аудитория

Сюжет 1

В таблице расставлены числа. Каждое утро от каждого числа таблицы отнимают текущее среднее арифметическое чисел в его строке, а каждый вечер — текущее среднее арифметическое чисел в его столбце.

1.1. Пусть таблица имеет размер 2×10. Верно ли, что рано или поздно числа перестанут меняться?

1.2. Тот же вопрос для таблицы 100×100.

Сюжет 2

Окружность ω с центром в точке I вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Биссектрисы треугольника ADE пересекаются в точке J. Отрезки BJ и CJ пересекают отрезок DE в точках P и Q соответственно.

2.1. Докажите, что $PJ > PD$.

2.2. Известно, что $IJ = DE$. Найдите угол BAC.

Сюжет 3

Есть две полоски длиной k. В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит n фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору.

3.1. Пусть $k = 4$, $n = 3$. Всегда ли Паша может добиться того, чтобы одна из фишек дошла до последней клетки?

3.2. Пусть $k = 4$, $n = 100$ и Паша каждым ходом сдвигает фишки в полоске только из каких-то двух клеток (по одной в каждой полоске). Докажите, что Рома может добиться того, что не более 50 фишек (с учетом снятых) попадут в последние клетки своих полосок.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 17 декабря 2017 года
11 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1

В таблице расставлены числа. Теперь задано два произвольных разбиения множества клеток таблицы — утреннее разбиение и вечернее разбиение — на непересекающиеся подмножества. Каждое утро от каждого числа таблицы отнимают текущее среднее арифметическое чисел в его утреннем множестве, а каждый вечер — текущее среднее арифметическое чисел в его вечернем множестве.

1.3. Докажите, что наступит утро, в которое все числа таблицы изменятся не более,чем на 0,01.

1.4. Докажите, что последовательность чисел, появляющихся в фиксированной клетке, имеет предел.

Сюжет 2

Окружность ω с центром в точке I вписана в треугольник ABC и касается его сторон AB и AC в точках D и E соответственно. Биссектрисы треугольника ADE пересекаются в точке J. Отрезки BJ и CJ пересекают отрезок DE в точках P и Q соответственно.

2.3. Докажите, что периметр треугольника BJC больше периметра четырехугольника $BDEC$.

2.4. Пусть M и N — середины DJ и JE. Докажите, что $PM = QN$.

Сюжет 3

Есть две полоски длиной k. В первой самой левой клетке каждой из полосок стоит n фишек. Двое играют в следующую игру: Паша своим ходом сдвигает произвольное множество фишек на одну клетку вправо, а Рома снимает с поля все только что сдвинутые фишки из какой-то из полосок по своему выбору.

3.3. Пусть $n < 2^{k-3}$. Докажите, что Рома может сделать так, что ни одна из фишек не дойдёт до конца.

3.4. Пусть $n > k \cdot 2^k$. Докажите, что Паша может сделать так, что хотя бы одна из фишек дойдёт до конца.