Олимпиада Юношеской Математической Школы 2010 г.
Задачи первого (заочного) тура
5 класс

1. Часы спешат на 1 ч 52 мин в неделю. В полночь с воскресенья на понедельник их поставили правильно. Какое время они будут показывать в шесть вечера в четверг?
2. За круглый стол сели 7 братьев-гномов. Гномы всегда говорят правду всем старшим братьям, а младшим — всегда врут. Каждый гном сказал своему правому соседу: "все здесь присутствующие говорят мне только неправду". В каком порядке сидят гномы? (Не забудьте обосновать свой ответ!)
3. По дороге едут автомобили: на запад с равными между собой скоростями "Москвич" и "Жигули", а на восток с равными между собой скоростями — "Мерседес" и БМВ. "Москвич" встретился с БМВ в 11.00, "Жигули" с БМВ — в 14.00, "Москвич" с "Мерседесом" — в 13.00. Когда "Жигули" встретились с "Мерседесом"?
4. Расставьте на окружности 10 точек и проведите 10 отрезков с концами в этих точках так, чтобы каждый отрезок имел общие точки ровно с 8 другими отрезками.
5. A, B, C, D — четыре последовательных цифры (в порядке возрастания). Четырьмя звчздочками обозначено число, состоящее из тех же цифр A–D в каком-то порядке. Решите числовой ребус:

$$\overline{ABCD} + \overline{DCBA} + **** = 21300.$$

6. Шахматную доску (8×8 клеток) разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников. Оказалось, что длины сторон всех прямоугольников больше 1. Может ли среди этих прямоугольников не оказаться ни одного квадрата?
7. Шестнадцать команд сыграли однокруговой турнир за 15 дней (каждая команда сыграла с каждой, в день играя по матчу). За победу в матче давали два очка, а за ничью — одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих равно либо количеству поражений, либо количеству побед. Больше всех очков набрал "Зенит". Докажите, что и за день до конца у "Зенита" очков было больше, чем у любой другой команды.

Решения олимпиады можно сдать следующими способами:

- **с 6 по 10 октября** *(включительно)* **с 16.00 до 19:00** *по адресу:* `14 линия Васильевского острова, дом 29.`
- *отправить почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.`
- *отправить электронной почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `olymp@yumsh.spbu.ru`

Контактный телефон ЮМШ: `445-05-38`. *Веб-сайт:* `http://yumsh.spbu.ru`

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2010 г.
Задачи первого (заочного) тура
6 класс

1. За круглый стол сели 7 братьев-гномов. Гномы всегда говорят правду всем старшим братьям, а младшим — всегда врут. Каждый гном сказал своему правому соседу: "все здесь присутствующие говорят мне только неправду". В каком порядке сидят гномы? (Не забудьте обосновать свой ответ!)
2. Часы спешат на 2 часа в неделю. В полночь с воскресенья на понедельник их поставили точно. Какое время будет на самом деле, когда в четверг эти часы покажут ровно 13:00?
3. В строчку выписаны числа по следующему правилу: сначала одна единица, потом две двойки, потом три тройки и так далее до 9, затем десять раз число 10, одиннадцать раз число 11 и так далее. Найдите 1000-ю цифру в этой строчке.
4. A, B, C, D — четыре последовательных цифры (в порядке возрастания). Четырьмя звчздочками обозначено число, состоящее из тех же цифр A–D в каком-то порядке. Решите числовой ребус:

$$\overline{ABCD} + \overline{DCBA} + **** = 12300.$$

5. Шахматную доску (8×8 клеток) разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников. Оказалось, что длины сторон всех прямоугольников больше 1. Может ли среди этих прямоугольников не оказаться ни одного квадрата?
6. Петя нарисовал круг и отметил на нем 25 точек. Потом Витя провел какие-то 6 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что после этого Петя сможет провести еще один такой отрезок, не имеющий общих точек ни с одним из проведенных Витей.
7. Тридцать шесть команд сыграли однокруговой турнир за 35 дней (каждая команда сыграла с каждой, в день играя по матчу). За победу в матче давали 3 очка, а за ничью — одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа поражений, либо вдвое меньше числа побед. Больше всех очков набрал "Зенит". Докажите, что и за два дня до конца у "Зенита" очков было больше, чем у любой другой команды.

Решения олимпиады можно сдать следующими способами:

- **с 6 по 10 октября** *(включительно)* **с 16.00 до 19:00** *по адресу:* `14 линия Васильевского острова, дом 29.`
- *отправить почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.`
- *отправить электронной почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `olymp@yumsh.spbu.ru`

Контактный телефон ЮМШ: `445-05-38`. *Веб-сайт:* `http://yumsh.spbu.ru`

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2010 г.
Задачи первого (заочного) тура
7 класс

1. За круглый стол сели 7 братьев-гномов. Гномы всегда говорят правду всем старшим братьям, а младшим – всегда врут. Каждый гном сказал своему правому соседу: “Все здесь присутствующие говорят мне только неправду”. В каком порядке сидят гномы? (Не забудьте обосновать свой ответ!)

2. В строчку выписаны числа по следующему правилу: сначала одна единица, потом две двойки, потом три тройки и так далее до 9, затем десять раз число 10, одиннадцать раз число 11 и так далее. Найдите 10000-ю цифру в этой строчке.

3. В вершинах куба расставлены числа от 1 до 8 так, что сумма чисел на каждом ребре нечетна. Докажите, что существует вершина куба, для которой сумма чисел в трех соседних с ней вершинах равна 18.

4. Шахматную доску (8×8 клеток) разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников. Оказалось, что длины сторон всех прямоугольников больше 1. Может ли среди этих прямоугольников не оказаться ни одного квадрата?

5. Таня хочет разложить 2010 конфет по 14 вазам так, что в каждой следующей вазе либо на 3 конфеты больше, либо на 4 конфеты меньше, чем в предыдущей. Удастся ли ей это сделать?

6. Таня и Сережа играют в такую игру. Вначале есть куча из 2009 камней, из которой они по очереди берут камни. Таня может брать 1 или 2 камня, а Сережа – 1, 2 или 3, но не может делать подряд три раза одинаковый ход. Первой ходит Таня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из них имеет выигрышную стратегию в этой игре?

7. Тринадцать городов соединены авиалиниями, каждый с каждым. На каждой авиалинии билет стоит целое число рублей, не превосходящее 2010. Может ли оказаться так, что стоимости всех билетов между городами различны, но любое путешествие, в котором турист сможет побывать во всех городах по одному разу и вернуться в исходный город, стоит одну и ту же сумму?

Решения олимпиады можно сдать следующими способами:

- **с 6 по 10 октября** *(включительно)* **с 16.00 до 19:00** *по адресу:* `14 линия Васильевского острова, дом 29.`
- *отправить почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.`
- *отправить электронной почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `olymp@yumsh.spbu.ru`

Контактный телефон ЮМШ: `445-05-38`. *Веб-сайт:* `http://yumsh.spbu.ru`

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2010 г.
Задачи первого (заочного) тура
8 класс

1. Найдите все натуральные числа n, для которых число

$$\frac{(2n+3)(n+1)-(n-3)(n+2)}{(2n+3)^2-3(n+1)(n+3)}$$

является квадратом натурального числа.

2. Шахматную доску (8×8 клеток) разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников. Оказалось, что длины сторон всех прямоугольников больше 1. Может ли среди этих прямоугольников не оказаться ни одного квадрата?

3. В выражении $(x^2-1)(9y^2-1)+5xy$ замените число 5 на какое-нибудь другое натуральное число так, чтобы это выражение раскладывалось на множители.

4. Найдите все двузначные натуральные числа, у которых цифра единиц равна количеству однозначных натуральных делителей, а цифра десятков — количеству двузначных натуральных делителей.

5. Коля нарисовал графики функций $y=|x-a|$ и $y=c-|x-b|$ (где a, b, c — положительные числа). Он заметил, что среди частей, на которые эти два графика и ось Ox разбили плоскость, оказались два треугольника и один четырехугольник. Докажите, что сумма площадей этих двух треугольников не меньше площади четырчхугольника.

6. В выпуклом пятиугольнике k диагоналей имеют длину меньше 1 см, а остальные $5-k$ диагоналей – длину больше 2 см. Чему может равняться k? (Найдите все возможные значения k и докажите, что других нет).

7. Тридцать шесть команд сыграли однокруговой турнир за 35 дней (каждая команда сыграла с каждой, в день играя по матчу). За победу в матче давали 3 очка, а за ничью — одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа поражений, либо вдвое меньше числа побед. Больше всех очков набрал “Зенит”. Докажите, что и за два дня до конца у “Зенита” очков было больше, чем у любой другой команды.

8. На окружности отметили 10 точек и провели несколько отрезков с концами в этих точках так, что любые два отрезка имеют общую точку. Найдите наибольшее возможное количество отрезков.

Решения олимпиады можно сдать следующими способами:

- **с 6 по 10 октября** *(включительно)* **с 16.00 до 19:00** *по адресу:* `14 линия Васильевского острова, дом 29.`
- *отправить почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.`
- *отправить электронной почтой* **до 10 октября** *на адрес:* `olymp@yumsh.spbu.ru`

Контактный телефон ЮМШ: `445-05-38`. *Веб-сайт:* `http://yumsh.spbu.ru`