Решения задач заочного тура олимпиады ЮМШ 2010 года.
7 класс

1. За круглый стол сели 7 братьев-гномов. Гномы всегда говорят правду всем старшим братьям, а младшим – всегда врут. Каждый гном сказал своему правому соседу: “Все здесь присутствующие говорят мне только неправду”. В каком порядке сидят гномы? (Не забудьте обосновать свой ответ!)

   Решение: Утверждение "Все здесь присутствующие говорят мне только неправду"истинно для самого младшего гнома и ложно для всех остальных. Иначе говоря, самый младший гном сказал правду, а остальные – соврали. Это означает. что каждый гном, кроме самого младшего, говорил с более младшим гномом. Следовательно, гномы сидят по кругу в порядке "от старшего к младшему а самый старший гном является правым соседом самого младшего.

2. В строчку выписаны числа по следующему правилу: сначала одна единица, потом две двойки, потом три тройки и так далее до 9, затем десять раз число 10, одиннадцать раз число 11 и так далее. Найдите 10000-ю цифру в этой строчке.

   Решение: В строчке сначала выписаны $45 = 1+2+...+9$ цифр, соответствующих однозначным числам, а потом начинаются двузначные. Заметим, что двузнчные числа занимают еще $2(10+11+...+99) = 9810$ цифр. Иначе говоря, после $45+9810 = 9855$ цифр начинаются трехзначные числа. Первое же из них – число 100 – занимает 300 цифр, то есть 10000-я цифра приходится на одну из цифр этого числа. Поскольку каждой третьей цифрой, начиная с 9856-й, является единица, а $10000 - 9856 = 144 = 3 \cdot 48$, то 10000-я цифра равна 1.

3. В вершинах куба расставлены числа от 1 до 8 так, что сумма чисел на каждом ребре нечетна. Докажите, что существует вершина куба, для которой сумма чисел в трех соседних с ней вершинах равна 18.

   Решение: Заметим, что рядом с каждым нечетным числом должны стоять только четные числа, а рядом с каждым четным - только нечетные числа. При такой расстановке каждая тройка четных чисел является соседней с какой-то вершиной куба. Относится это и к тройке чисел (4,6,8), сумма которых равна 18.

4. Шахматную доску (8×8 клеток) разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников. Оказалось, что длины сторон всех прямоугольников больше 1. Может ли среди этих прямоугольников не оказаться ни одного квадрата?

   Решение: Если стороны прямоугольника больше 1 и этот прямоугольник не является квадратом 2x2, то площадь такого прямоугольника не меньше $2 \cdot 3 = 6$. Следовательно, сумма площадей 11 прямоугольников не меньше 66, т.е. заведомо больше плошади доски. Полученное противоречие показывает, что по крайней мере один из прямоугольников является квадратом 2x2.

5. Таня хочет разложить 2010 конфет по 14 вазам так, что в каждой следующей вазе либо на 3 конфеты больше, либо на 4 конфеты меньше, чем в предыдущей. Удастся ли ей это сделать?

   Ответ: нет, не удастся.

   Решение: Выпишем под первой вазой число x, под второй – x+3, под третьей – x+6, под 14-й – x+39. Сумма выписанных чисел равна 14x+273=7(2x+39), т.е. делится на 7. Пусть число конфет в первой вазе равно x. Тогда количество конфет во второй вазе либо равно выписанному под ней числу, либо меньше его на 7. Аналогично, в третьей вазе количество конфет также отличается от выписанного под ней числа на 0, 7 или 14. То же самое верно и для всех последующих ваз. Значит, сумма конфет во всех вазах тоже делится на 7. Но число 2010 на 7 не делится.

6. Таня и Сережа играют в такую игру. Вначале есть куча из 2009 камней, из которой они по очереди берут камни. Таня может брать 1 или 2 камня, а Сережа – 1, 2 или 3, но не может делать подряд три раза одинаковый ход. Первой ходит Таня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из них имеет выигрышную стратегию в этой игре?

Решение: Выигрышную стратегию имеет Сережа. Одна из его возможных стратегий сводится к тому, чтобы за каждую пару ходов (т.е. ход Тани, свой ответ, второй ход Тани и второй свой ответ) уменьшать размер кучи ровно на 7. Поскольку 2009 делится на 7, то последний камень из кучи достанется Сереже, и Таня не сможет сделать ход. Как же Сереже добиться уменьшения кучи на 7? Для этого он должен на первый ход Тани "1"отвечать "3"(а затем второй ход Тани дополнять до 3: на 1 отвечать 2, а на 2 отвечать 1). Если же первым ходом Таня взяла 2 камня, то Сережа отвечает "1"и затем дополняет второй ход Тани до 4: на 1 отвечает 3, а на 2 – 2. Нетрудно убедиться, что такая стратегия действительно уменьшает кучу на 7 камней за два хода, и что в любом случае второй ответ Сережи не совпадает с его первым ответом, т.е. даже никакие два раза подряд он не делает одинаковых ходов.

7. Тринадцать городов соединены авиалиниями, каждый с каждым. На каждой авиалинии билет стоит целое число рублей, не превосходящее 2010. Может ли оказаться так, что стоимости всех билетов между городами различны, но любое путешествие, в котором турист сможет побывать во всех городах по одному разу и вернуться в исходный город, стоит одну и ту же сумму?

   Ответ: да, может

   Решение: Занумеруем города числами от 1 до 13, и потребуем, чтобы поездка из города I в город J стоила сумма S(I)+S(J), где последовательность чисел S(I) задана следующим образом: S(1)=1, S(2)=2, S(k+2)=S(k+1)+S(k) для всех натуральных k (такая числовая последовательность называется числами Фибоначчи). Самые большие числа из использованных нами - S(12)=223 и S(13)=377, поэтому самым дорогим билетом будет билет между 12-м и 13-м городами, который стоит не более 377 рублей. Кроме того, любые два билета стоят различное количество рублей, потому что стоимость самого дешевого билета в 13-й город (S(13)+S(1)) больше стоимости самого дорогого из остальных билетов в 12-й город (равной S(12)+S(11)=S(13)); в свою очередь самый дешевый билет до 12-го города (S(12)+S(1)) стоит больше, чем самый дорогой из остальных (не из 12-го и не из 13-го) билетов до 11-го города (S(10)+S(11)=S(12)) и т.д. Наконец, найдем стоимость любого кольцевого путешествия, проходяшего по всем 13 городам. Очевидно, что в I-ый город мы один раз въехали и один раз выехали из него, поэтому число S(I) вошло в стоимость ровно двух авиабилетов. Поскольку это верно для всех I, то общая стоимость билетов равна 2(S(1)+S(2)+...+S(13)), то есть не зависит от конкретного маршрута.