Решения задач заочного тура олимпиады ЮМШ 2010 года.
6 класс

1. За круглый стол сели 7 братьев-гномов. Гномы всегда говорят правду всем старшим братьям, а младшим – всегда врут. Каждый гном сказал своему правому соседу: “Все здесь присутствующие говорят мне только неправду”. В каком порядке сидят гномы? (Не забудьте обосновать свой ответ!)

   Решение: Утверждение "Все здесь присутствующие говорят мне только неправду"истинно для самого младшего гнома и ложно для всех остальных. Иначе говоря, самый младший гном сказал правду, а остальные – соврали. Это означает, что каждый гном, кроме самого младшего, говорил с более младшим гномом. Следовательно, гномы сидят по кругу в порядке "от старшего к младшему а самый старший гном является правым соседом самого младшего.

2. Часы спешат на 2 часа в неделю. В полночь с воскресенья на понедельник их поставили точно. Какое время будет на самом деле, когда в четверг эти часы покажут ровно 13:00?

   Решение: За неделю эти спешащие часы успевают пройти с понедельника, 0:00, до следующего понедельника, 2:00. Четверг, 13:00 – это как раз середина этого пути. Значит, прошло ровно полнедели, и на самом деле сейчас четверг, 12:00.

3. В строчку выписаны числа по следующему правилу: сначала одна единица, потом две двойки, потом три тройки и так далее до 9, затем десять раз число 10, одиннадцать раз число 11 и так далее. Найдите 1000-ю цифру в этой строчке.

   Решение: В строчке сначала выписаны $45 = 1+2+...+9$ цифр, соответствующих однозначным числам, а потом начинаются двузначные. Числа с 10 по 31 занимают еще $2(10+11+...+31) = 902$ цифр. Итого, пока что выписаны $45 + 902 = 947$ цифр. Далее, мы 32 раза пишем число 32, это займет $2 \cdot 32 = 64$ цифр, следовательно, 1000-ная цифра будет либо 3, либо 2. Так как осталось 53 цифры, то это будет именно 3.

4. A, B, C, D — четыре последовательных цифры (в порядке возрастания). Четырьмя звёздочками обозначено число, состоящее из тех же цифр A–D в каком-то порядке. Решите числовой ребус:

   $$\overline{ABCD} + \overline{DCBA} + **** = 12300.$$

   Решение: Заметим, что A не может быть 5 или больше, так как $5678 + 8765$ уже больше 12300. Значит, $\overline{ABCD}$ может равняться только 1234, 2345, 3456 или 4567. Посчитаем для каждого из этих четырех вариантов значение выражения $12300 - \overline{ABCD} - \overline{DCBA}$. Оно должно равняться $****$, то есть, должно быть составлено из цифр A, B, C, D. Прямой подсчет показывает, что это выполняется только если $\overline{ABCD} = 2345$ (в этом случае $**** = 4523$).

5. Шахматную доску (8×8 клеток) разрезали по клеточкам на 11 прямоугольников. Оказалось, что длины сторон всех прямоугольников больше 1. Может ли среди этих прямоугольников не оказаться ни одного квадрата?

   Решение: Предположим, что, и правда, среди прямоугольников не оказалось ни одного квадрата. Тогда минимальный по площади возможный прямоугольник - это прямоугольник 2x3. Он занимает 6 клеток. Значит, в сумме, 11 прямоугольников занимают не меньше, чем $11 \cdot 6 = 66$ клеток. Но ведь на доске всего $8 \cdot 8 = 64$ клетки! Полученное противоречие указывает на то, что наше предположение было неверно. То есть, хоть один квадрат точно будет.

6. Петя нарисовал круг и отметил на нем 25 точек. Потом Витя провел какие-то 6 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что после этого Петя сможет провести еще один такой отрезок, не имеющий общих точек ни с одним из проведенных Витей.

   Решение: 6 отрезков, проведенных Витей, заняли какие-то $6 \cdot 2 = 12$ точек из двадцати пяти, имеющихся на окружности, и разбили окружность на 12 дуг. Осталось еще 13 “свободных” точек, как-то распределенных по этим 12 дугам. Очевидно, что при таких условиях хотя бы в одну дугу попало как минимум 2 точки. Петя может их соединить, и этот отрезок не будет пересекать ни один из уже имеющихся.

7. Тридцать шесть команд сыграли однокруговой турнир за 35 дней (каждая команда сыграла с каждой, в день играя по матчу). За победу в матче давали 3 очка, а за ничью — одно. Оказалось, что у каждой команды количество ничьих либо вдвое больше числа поражений, либо вдвое меньше числа побед. Больше всех очков набрал “Зенит”. Докажите, что и за два дня до конца у “Зенита” очков было больше, чем у любой другой команды.

   Решение: Докажем, что в итоге количество очков у каждой команды кратно 7. Пусть у некоторой команды — n поражений и $2n$ ничьих. Тогда у неё всего 35-3n выигрышей, поэтому она набрала $3(35-3n)+4n = 105-7n$ очков. Если же у команды m ничьих и $2m$ выигрышей, то она набрала $6m+m=7m$ очков. Следовательно, в конце турнира у “Зенита” — хотя бы на 7 очков больше, чем у любой другой команды. Теперь утверждение задачи непосредственно следует из того факта, что за один день разница между количеством набранных очков у двух команд может измениться максимум на три очка.