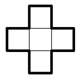
Олимпиада Юношеской Математической Школы 2007 г.
Задачи первого (заочного) тура
5–6 классы



1. Из клетчатой бумаги вырезан прямоугольник 6×7. Разрежьте его по линиям сетки на две фигурки так, чтобы ни из одной из них нельзя было вырезать крестик, изображённый на рисунке.

2. В Тьмутаракани прошел забег с участием трёх спортсменов. На финише репортер местной газеты спросил у каждого участника, какое место тот занял. Каждый назвал одно из чисел 1, 2, 3, причем все, кроме одного, сказали правду. Сумма их ответов оказалась равна 4. Выясните, какое место занял соврavший спортсмен, и что именно он сказал? Ответ поясните.

3. У Саши и Маши вместе 50 воздушных шариков. Маша хочет подарить Саше на день рождения часть своих шариков. Если она оставит себе половину своих шариков, а Саше подарит остальные, то у него будет меньше 45 шариков, а если она оставит себе треть, то больше 45 шариков. Сколько сейчас у Маши воздушных шариков? Приведите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

4. Лягушка-путешественница движется по одной прямой, проходя каждый день по 50 километров. Каждую полночь она выбирает направление своего движения. Уже давно она установила себе правило — каждый день двигаться в том же направлении, что и за неделю до этого. Объясните, почему, стартовав из Костромы от памятника Сусанину, лягушка-путешественница не сможет ровно через месяц оказаться там же.

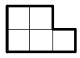
2	6	
1		

5. Миша и Валерий Сергеевич решали следующую старинную задачу: нужно расставить в клетках прямоугольника 3×3 девять различных натуральных чисел так, чтобы в любых двух соседних по стороне клетках одно из чисел делилось на другое. При этом запрещено ставить числа, большие 24. Валерий Сергеевич поставил три числа так, как указано на рисунке. Помогите Мише достойно завершить решение этой задачи — расставьте числа до конца.

6. Крокодил Гена записал в строчку числа от 1 до 9 в каком-то порядке. Чебурашка под каждыми двумя соседними числами записал их положительную разность. У Чебурашки получилась такая строчка: $1, 2, 3, 4, 2, 1, 1, 3$. Выясните, в каком порядке могли быть записаны числа в первом ряду. Приведите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

7. В первых трех классах школы учатся 80 детей, причем третьеклассников вдвое больше, чем второклассников. На Новый Год ученики этих трех классов дарили друг другу подарки. Известно, что каждый второклассник подарил на один подарок больше, чем получил, а третьеклассник — на два подарка больше. Зато каждый первоклассник подарил на пять подарков меньше, чем получил. Определите, сколько в школе третьеклассников, и объясните свой ответ.

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2007 г.
Задачи первого (заочного) тура
7-8 классы



1. Сложите из фигурок, изображённых на рисунке, квадрат 9×9 без правой верхней угловой клетки. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

2. В Тьмутаракани прошел забег с участием десяти спортсменов. На финише репортер местной газеты спросил у каждого участника, какое место тот занял. Каждый назвал число от 1 до 10, причем все, кроме одного, сказали правду. Сумма их ответов оказалась равна 47. Какое место занял соврavший спортсмен, и что именно он сказал? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

3. В узлы сетки 3×3 вбито 16 гвоздиков — по 4 в ряд. У Димы есть бирки с номерами от 1 до 16, которые он собирается наклеить на шляпки гвоздей. После этого его сестра Катя будет натягивать нитки между гвоздиками с соседними номерами. Помогите Диме наклеить бирки так, чтобы любая нитка, натянутая Катей, задевала еще хотя бы один гвоздь, кроме тех, к которым привязана.

4. В первых трёх классах школы учатся 140 детей, причём третьеклассников вдвое больше, чем второклассников. В День Именинника ученики первых, вторых и третьих классов дарили друг другу подарки (каждый — кому захочет). После оказалось, что каждый второклассник подарил на один подарок больше, чем получил, третьеклассник — на два, но каждый первоклассник подарил на три меньше, чем получил. Определите, сколько в школе третьеклассников. Не забудьте обосновать свой ответ.

5. Можно ли разрезать прямоугольник 5×6 клеток на пентамино (фигуры из 5 клеток) так, чтобы фигурок каждого вида получилось не больше двух, а разрезание получилось симметричным относительно вертикальной и горизонтальной осей. Разрезание называется симметричным, если линии разрезов совмещаются при складывании вдоль оси. Объясните свой ответ.

6. Новая претендентка на должность фрейлины Капризной Принцессы должна назвать такие два числа — четырехзначное и трехзначное, что каждое из них делится на их разность. Принцесса заранее (для проверки) выписала на листочек все такие пары чисел. Сколько пар у нее получилось? Не забудьте обосновать свой ответ.

7. На доске написаны числа 1 и 2. Каждую минуту Петя вычисляет наибольший общий делитель двух имеющихся на доске чисел, и прибавляет его к одному из них (по своему усмотрению). Объясните, почему он не сможет выбирать таким образом, чтобы разность имеющихся двух чисел всегда оставалась меньше тысячи.

8. На листе бумаги изображены n кружков, в каждом из которых написано какое-то целое число от 0 до $n-1$. Докажите, что можно некоторые кружки соединить линиями так, что не менее половины чисел окажутся равными количеству линий, приходящих в этот кружок. Линии могут пересекаться.

Решения олимпиады Вы можете **с 9 по 12 октября** (включительно) с 16.00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29.* Также Вы можете отправить свою работу по почте **до 12 октября** на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.* Контактный телефон ЮМШ: 445-05-38. Веб-сайт: `http://yumsh.spbu.ru`

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2007 г.
Задачи первого (заочного) тура
9 класс

Сюжет 1

Будем называть многочлен с целыми коэффициентами разложимым, если он раскладывается в произведение многочленов меньших степеней с целыми коэффициентами.

1. При каких значениях параметра b квадратный трёхчлен x^2+7x+b будет разложимым?
2. Придумайте 2007 разложимых многочленов вида x^4+ax^2+25.
3. При каких значениях параметра a многочлен x^4+ax^2+7 будет разложимым?
4. Опишите все пары (a,b), для которых многочлен x^4+ax^2+b будет разложимым.

Сюжет 2

1. Из центра прямоугольника 5×4 вырезали доминошку (прямоугольник 1×2). Сколько способов разрезать остаток на доминошки?
2. Докажите, что при любом разрезании, описанном в предыдущем пункте, вертикально расположено нечетное количество доминошек.
3. Из центра прямоугольника 11×10 вырезали доминошку. Докажите, что если разрезать полученную фигурку на доминошки, то вертикально будут стоять не менее шести доминошек.
4. Из центра прямоугольника 11×10 вырезали доминошку. Докажите, что если её разрезать на угловые триминошки (квадратики 2×2 без одной клетки) так, чтобы не было триминишек без верхней левой клетки, то количество триминошек, у которых нет верхней правой или нижней левой клетки, делится на три.

Сюжет 3

Для каждых трех вершин n-угольника (где $n>4$) отмечен центр проходящей через них окружности.

1. Любой центр совпадает с одной из двух заданных точек — A и B. Докажите, что исходный n-угольник вписанный.
2. Известно, что любой центр совпадает с одной из шести заданных точек. Докажите, что исходный n-угольник вписанный.
3. Для каждого натурального n приведите пример n-угольника, имеющего ровно $\frac{n^2-3n+4}{2}$ различных центров.
4. Найдется ли такое n, что у некоторого n-угольника будет больше одного, но меньше $\frac{n^2-3n+4}{2}$ различных центров?

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2007 г.
Задачи первого (заочного) тура
10–11 классы

Сюжет 1

Назовем линейным трехчленом выражение вида $ax+by+c$, где a, b, c — какие-то вещественные числа, причём a и b одновременно не равны нулю, а x, y — переменные. Линейным неравенством будем называть неравенство вида $f(x,y)>0$ или $f(x,y)<0$, где $f(x,y)$ — линейный трехчлен.

1. Даны три линейных трехчлена. Докажите, что из них можно составить систему из трех линейных неравенств, не имеющую решений.
2. Дана система из четырех линейных неравенств, имеющая решение. Докажите, что можно изменить знак на противоположный в одном или в двух неравенствах так, чтобы получившаяся система не имела решений.
3. Дана система нестрогих линейных неравенств, имеющая решение. Известно, что если любые два знака неравенства в ней заменить на знаки равенства, то получившаяся система не будет иметь решений. Докажите, что можно отбросить все неравенства кроме каких-то двух так, чтобы получившаяся система (из двух неравенств) была равносильна исходной.
4. Дано n линейных трехчленов. Учитель предложил задачу: составить систему из n линейных неравенств, не имеющую решений, такую, что при замене любого из n знаков неравенства на противоположный получалась система, также не имеющая решений. Найдите минимальное n, при котором это возможно.

Сюжет 2

В этом сюжете рассматриваются такие наборы целых чисел, что всевозможные суммы k слагаемых различны, но есть две равные суммы $k+1$ слагаемого, где k — некоторое натуральное число.

1. Докажите, что чисел в таком наборе не меньше, чем $2k+2$.
2. Приведите пример такого набора для $k=2$.
3. Приведите пример такого набора для произвольного k.
4. Есть $2k+3$ целых числа. Все суммы по k разные. Докажите, что совпадений сумм $k+1$ слагаемых не более, чем $2k+1$.

Сюжет 3

Рассмотрим на плоскости четыре точки: A, B, C и D, и следующие три точки: P — точка перечения прямых AB и CD, Q — прямых AD и BC, и R — прямых AC и BD. Назовём получившиеся точки *сопутствующими* точкам A, B, C и D, а $\triangle PQR$ — *сопутствующим.*

1. Пусть на плоскости даны точки A, B, Q и R, причём никакие три из этих четырёх точек не лежат на одной прямой. Докажите, что можно единственным образом восстановить остальные точки: C, D и P.
2. Докажите, что для любого $\triangle PQR$ на плоскости есть хотя бы один невыпуклый четырёхугольник $ABCD$, для которого $\triangle PQR$ будет сопутствующим.
3. Пусть на плоскости дан $\triangle PQR$, и RM — его медиана. Найдите на этой медиане бесконечно много таких положений точки A, что можно построить выпуклый четырёхугольник $ABCD$, для которого $\triangle PQR$ будет сопутствующим, и бесконечно много положений вершины A, для которых можно построить невыпуклый соответствующий четырёхугольник.
4. Пусть на плоскости задано положение точек P, Q, R и точки A внутри $\triangle PQR$. Докажите, что существует не более одного четырехугольника $ABCD$, для которого $\triangle PQR$ будет сопутствующим.

Решения олимпиады Вы можете **с 9 по 12 октября** (включительно) с 16.00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29*. Также Вы можете отправить свою работу по почте **до 12 октября** на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ*. Контактный телефон ЮМШ: 445-05-38. Веб-сайт: `http://yumsh.spbu.ru`