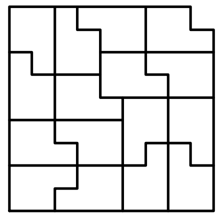
Разбор задач первого (заочного) тура
олимпиады Юношеской Математической Школы 2007г.
7–8 классы

1. В этой задаче существует много вариантов сложить квадрат 9×9 без угловой клетки из фигурок данной в условии формы.

Например:



2. Сумма всех мест равна $1+2+...+10 = 55$, что на 8 больше суммы ответов всех спортсменов. Поскольку все, кроме одного участника, сказали правду, то, следовательно, его место на восемь больше, чем сказанное им число. Если его ответ больше двух, то его место должно быть больше 10, чего не может быть, так как мест всего десять. Остаётся два возможных варианта: он сказал, что занял второе место, но на самом деле был десятым, или что он занял первое место, а был девятым.

3. В этой задаче есть много вариантов расстановки бирок на шляпках гвоздиков. Например, два из них:

1	13	8	2
6	16	5	15
10	12	9	11
4	14	7	3

1	7	2	8
13	11	14	12
4	6	3	5
16	10	15	9

4. Пусть П — количество первоклассников, В — второклассников, Т — третьеклассников. Тогда по условию $П + В + Т = 140$ и $Т = 2В$, откуда $П + 3В = 140$, $П = 140 - 3В$. Разность количества подаренных подарков и количества полученных равна $1В + 2Т - 3П$. Но количество подаренных подарков равно количеству полученных, поэтому $1В + 2Т - 3П = 0$. Следовательно $В + 2Т = 3П$, а поскольку $Т = 2В$, то $В + 2 \cdot (2В) = 5В = 3П$. Подставим $П = 140 - 3В$ и получим, что $5В = 3(140 - 3В)$, $5В = 420 - 9В$, $14В = 420$, $В = 30$. А количество третьеклассников $Т = 2В = 2 \cdot 30 = 60$.

5. Требуемое разрезание невозможно. Приведем два доказательства этого.

Первый способ.

Предположим, что так разрезать можно. Тогда пентамино всего 6 штук.

Пусть наш прямоугольник расположен, как указано на рисунке ниже. Будем называть вертикальную ось симметрии "осью В", а горизонтальную — "осью Г".

Ось В не может пересекать никакое пентамино, так как тогда оно будет разбиваться ею на две симметричные части, причем в каждой целое число клеток, и в сумме получим чётное число клеток, но в пентамино их пять. Если какое-то пентамино не пересекает обе оси симметрии, то симметричных ему фигур будет ещё 3 штуки, но по условию всего фигур одинаковой формы должно быть не более двух.

Значит, каждое из 6 пентамино пересекает ось Г, а поскольку на этой оси всего 6 клеток, то у каждого пентамино на ней лежит ровно по одной клетке. Остальные четыре клетки должны лежать симметрично относительно оси Г, две сверху, две снизу. Расположить эти пары клеток, чтобы получились разные пентамино, можно только двумя способами: горизонтально, получится "С"-пентамино, и вертикально, получится прямое пентамино (то есть 1×5).

Но каждого вида фигурок должно быть не более двух, то есть всего не более 4-х пентамино, а нам нужно шесть. Значит, мы получили противоречие, и такое разрезание невозможно.

Второй способ.

Так же, как и в первом варианте решения, объясняется почему никакое пентамино не может пересекать вертикальную ось симметрии.

Рассмотрим угловые клетки прямоугольника, на рисунке они пронумерованы от 1 до 4. Если бы клетки 1 и 2 принадлежали разным фигурам, то из-за симметрии относительно горизонтальной оси эти фигуры должны были быть одинаковыми.

1	5			7	3
2	6			8	4

Учтя симметрию относительно вертикальной оси, получаем еще две таких же фигуры, содержащие остальные угловые клетки — 3 и 4. Но в условии не допускается больше двух фигур одинаковой формы. Поэтому, если бы требуемое разрезание было возможным, то клетки 1 и 2 должны были бы принадлежать одному пентамино. Но такое пентамино возможно только одного вида — вертикальное прямое пентамино (1×5). По симметрии клетки 3 и 4 тоже принадлежат вертикальному прямому пентамино.

Аналогичным рассуждением можно убедиться, что клетки 5 и 6 тоже обязаны принадлежать одному пентамино, которое также с необходимостью получается прямым, и мы снова пришли к необходимости иметь больше двух фигур одной формы.

Итак, требуемое разрезание невозможно.

6. Пусть есть пара таких чисел: четырёхзначное p и трёхзначное q, что они оба делятся на их разность $d = p - q$. Тогда $q = k \cdot d$, и тем самым $p = q + d = kd + d = (k+1)d$. Так как d делитель q, то это не более чем трёхзначное число.

Для каждого значения d от 1 до 999 существует единственное k, такое что kd еще трёхзначное число, а $(k+1)d$ — уже четырёхзначное. Итак, каждому значению разности d от 1 до 999 соответствует ровно одна пара подходящих чисел, и таким образом все пары будут найдены. То есть общее количество таких пар равно 999.

7. Докажем от противного. Предположим, что есть способ так действовать, что разность между числами будет оставаться не больше тысячи.

Во-первых, заметим, что с каждой операцией НОД не уменьшается. В самом деле, если у нас были числа a и b, и их НОД равен d, то число d будет делителем и $a + d$ и $b + d$, и независимо от выбора НОД следующей пары чисел будет делиться на d, то есть будет не меньше d.

Во-вторых, всегда НОД двух чисел не больше их разности. То есть НОД всех пар в нашей последовательности будет оставаться не больше тысячи. Значит, с какого-то места НОД у всех пар будет один и тот же. Обозначим это число D.

Построим новую последовательность пар чисел — возьмем пары чисел из первой последовательности с того места, с которого они все делятся на D, и разделим их на D. Ясно, что в каждой паре теперь НОД равен единице (то есть они взаимно просты), и любые две соседние пары отличаются прибавлением единицы к одному из чисел. При этом разность чисел в каждой паре по-прежнему не больше тысячи.

Теперь покажем, что такая бесконечная последовательность пар взаимно простых чисел, разность которых всегда меньше тысячи, существовать не может. Поскольку последовательность бесконечна, а разность ограничена, то оба числа в последовательности растут неограниченно. Также, они никогда не могут стать равными. поэтому меньшее в паре всегда остается меньшим.

Рассмотрим число P — произведение всех простых чисел от 2 до 1000. Так как числа увеличиваются на 1, то будет первый момент, когда меньшее из чисел станет равным P. Тогда большее из чисел должно лежать в интервале от $P + 1$ до $P + 1000$. Но любое из чисел $P + k$ для k от 2 до 1000 имеет хотя бы один нетривиальный общий делитель с P, так как P делится на любое простое число от 2 до 1000. Значит, так как большее число в паре должно быть всегда взаимно простым с меньшим, то оно в этот момент должно быть равно $P + 1$. Но тогда на следующем шаге мы получаем либо два числа, равных $P + 1$, и их НОД тоже равен $P + 1$, либо большее число становится равным $P + 2$, и их НОД становится равным 2.

Таким образом, такая последовательность пар чисел существовать не может, и разность чисел будет неограниченно увеличиваться.

8. Всего есть N кружков. Обозначим K — ближайшее сверху целое число к $N/2$, и L — ближайшее снизу целое число к $N/2$. (Они равны друг другу, если N чётно, и отличаются на единицу, если N нечётно, и в сумме всегда дают N.)

Обведём красным цветом те кружки, в которых стоят числа, меньшие чем K.

Если красных кружков оказалось больше либо равно половины от всех кружков, то обведем чёрным цветом ровно K из них. Случай, когда красных кружков оказалось меньше половины, разберем позже.

Для этих чёрных кружков будем обеспечивать равенство количества линий с числом в кружке. А именно, соединим каждый черный кружок с тем количеством не-чёрных кружков, которое в нём написано. Это всегда возможно — у нас будет достаточное количество не-чёрных кружков, поскольку их ровно L штук, а все числа в чёрных кружках не больше L. Так как из каждого чёрного кружка мы проводим линии только к не-чёрным, и при этом разным, то понятно, что никакие два кружка не будут соединены более чем одной линией, и требование задачи выполнено.

Осталось разобрать случай, когда красных кружков меньше половины от всех. Тогда обведём чёрным ровно K не-красных кружков. Сперва соединим линией каждые два чёрных кружка. Теперь из каждого чёрного кружка выходит ровно $K - 1$ линия. Поскольку в любом чёрном кружке стоит число от K до $N - 1$, то из каждого из них осталость провести от 1 до L линий. У нас есть ровно L не-чёрных кружков, к которым мы еще не проводили линий. Теперь проведем из каждого чёрного кружка к не-чёрным столько линий, сколько не хватает. Так как не-чёрных кружков ровно L штук, то их для этого хватит. Теперь требование задачи выполнено и в этом случае.