Олимпиада
Юношеской Математической Школы
2007 года

Санкт-Петербург

2007

УДК 51-8
ББК 22.10

Олимпиада Юношеской математической школы 2007 года

Книга предназначена для школьников, учителей, преподавателей математических кружков и просто любителей математики. В книге приведены задачи Олимпиады ЮМШ 2007 года с подробными решениями.

Составители:
К.В. Абраменко
М.А. Антипов
В.А. Вальтман
А.А. Вдовина
Е.Е. Жукова
И.М. Зильберборд
Г.В. Калинин
В.С. Самойлов
А.А. Солынин
А.М. Порецкий

Предисловие

Начиная с 1997 года, в Санкт-Петербурге каждую осень проходит олимпиада Юношеской Математической Школы. Эта брошюра содержит материалы олимпиады 2007 года.

Олимпиада состоит из двух туров. Принять участие в первом (заочном) может любой учащийся 5-11 классов. Для этого он должен представить свою работу, не позднее объявленного срока. Каждая задача оценивается в определенное число баллов (стоит отметить, неполное решение также влияет на итог). Авторы работ, набравших необходимое число баллов, приглашаются на второй (очный) тур, который проходит в форме устной олимпиады.

В этом году олимпиада проводилась по следующей схеме. В сентябре состоялся первый (заочный) тур. Учащимся 5 и 6 классов были предложены одинаковые задачи, также одинаковыми были варианты для 7–8 и для 10–11 классов. Итоги по каждому классу подводились отдельно. Варианты для 9 и 10–11 классов были разбиты на сюжеты — наборы задач, в которых предлагалось ответить на несколько близких вопросов или исследовать один и тот же объект с разных сторон. Участники должны были представить решения задач в письменном виде до 13 октября. 25 ноября состоялся второй тур для 5-6- и 9-классников, 26 ноября для 10-11-классников и 2 декабря для 7-8-классников.

Очный тур проходил следующим образом.

5–6: В начале участникам предлагалось 4 задачи, на которые отводилось 2,5 часа. Решившие 3 из них переходили в выводную аудиторию, где им выдавалось еще 3 задачи, а время увеличивалось на час.

7–8: Учащимся также сначала предлагался набор из четырех задач, на решение которых отводилось 3 часа. В выводной аудитории добавлялось еще три задачи и час времени. Наконец, тем, кто справлялся со всеми семью, предлагались еще две задачи.

9: Вариант состоял из трех сюжетов по 4 пункта в каждом. Сначала были предложены по два пункта из каждого сюжета. Участники, решившие по крайней мере четыре пункта из этих шести получали все оставшиеся задачи.

10–11: Олимпиада была письменной и состояла также из трех сюжетов, по четыре пункта в каждом.

В брошюре приведены все задачи олимпиады и их решения. Безусловно, большинство задач может быть решено иначе. Задача засчитывалась, если хотя бы одно из предложенных участником решений было верным. Впрочем, наличие у школьника нескольких верных решений одной задачи не увеличивало его результат. Для некоторых задач в брошюре приведены два решения.

Мы надеемся, что Вам понравятся задачи нашей олимпиады, и Вы примете в ней участие в следующем году.

Условия задач заочного тура, как обычно, будут распространяться через школы, кроме того, они будут опубликованы на нашем сайте.

Наши координаты:

Почтовый адрес: 198504, Старый Петергоф, Университетский пр., дом 28, математико-механический факультет СПбГУ, ЮМШ.

E-mail: mail@yumsh.spbu.ru.

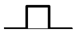
Сайт: http://www.yumsh.spbu.ru

Телефон: 445-05-38

Задачи первого (заочного) тура

5–6 класс

1. Из клетчатой бумаги вырезан прямоугольник 6×7. Разрежьте его по линиям сетки на две фигурки так, чтобы ни из одной из них нельзя было вырезать крестик, изображённый на рисунке.



2. В Тьмутаракани прошел забег с участием трёх спортсменов. На финише репортер местной газеты спросил у каждого участника, какое место тот занял. Каждый назвал одно из чисел 1, 2, 3, причем все, кроме одного, сказали правду. Сумма их ответов оказалась равна 4. Выясните, какое место занял соврявший спортсмен, и что именно он сказал? Ответ поясните.

3. У Саши и Маши вместе 50 воздушных шариков. Маша хочет подарить Саше на день рождения часть своих шариков. Если она оставит себе половину своих шариков, а Саше подарит остальные, то у него будет меньше 45 шариков, а если она оставит себе треть, то больше 45 шариков. Сколько сейчас у Маши воздушных шариков? Приведите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

4. Лягушка-путешественница движется по прямой, проходя каждый день по 50 километров. Каждую полночь она выбирает направление своего движения. Уже давно она установила себе правило — каждый день двигаться в том же направлении, что и за неделю до этого. Объясните, почему, стартовав из Костромы от памятника Сусанину, лягушка-путешественница не сможет ровно через месяц оказаться там же.

5. Миша и Валерий Сергеевич решали следующую старинную задачу: нужно расставить в клетках прямоугольника 3×3 девять различных натуральных чисел так, чтобы в любых двух соседних по стороне клетках одно из чисел делилось на другое. При этом запрещено ставить числа, большие 24. Валерий Сергеевич поставил три числа так, как указано на рисунке. Помогите Мише достойно завершить решение этой задачи — расставьте числа до конца.

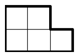
2	6	
1		

6. Крокодил Гена записал в строчку числа от 1 до 9 в каком-то порядке. Чебурашка под каждыми двумя соседними числами записал их положительную разность. У Чебурашки получилась такая строчка: 1, 2, 3, 4, 2, 1, 1, 3. Выясните, в каком порядке могли быть записаны числа в первом ряду. Приведите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

7. В первых трех классах школы учатся 80 детей, причем третьеклассников вдвое больше, чем второклассников. На Новый Год ученики этих трех классов дарили друг другу подарки. Известно, что каждый второклассник подарил на один подарок больше, чем получил, а третьеклассник — на два подарка больше. Зато каждый первоклассник подарил на пять подарков меньше, чем получил. Определите, сколько в школе третьеклассников, и объясните свой ответ.

7–8 класс

1. Сложите из фигурок, изображённых на рисунке, квадрат 9×9 без правой верхней угловой клетки. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



2. В Тьмутаракани прошел забег с участием десяти спортсменов. На финише репортер местной газеты спросил у каждого участника, какое место тот занял. Каждый назвал число от 1 до 10, причем все, кроме одного, сказали правду. Сумма их ответов оказалась равна 47. Какое место занял совравший спортсмен, и что именно он сказал? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

3. В узлы сетки 3×3 вбито 16 гвоздиков — по 4 в ряд. У Димы есть бирки с номерами от 1 до 16, которые он собирается наклеить на шляпки гвоздей. После этого его сестра Катя будет натягивать нитки между гвоздиками с соседними номерами. Помогите Диме наклеить бирки так, чтобы любая нитка, натянутая Катей, задевала еще хотя бы один гвоздь, кроме тех, к которым привязана.

4. В первых трёх классах школы учатся 140 детей, причём третьеклассников вдвое больше, чем второклассников. В День Именинника ученики первых, вторых и третьих классов дарили друг другу подарки (каждый — кому захочет). После оказалось, что каждый второклассник подарил на один подарок больше, чем получил, третьеклассник — на два, но каждый первоклассник подарил на три меньше, чем получил. Определите, сколько в школе третьеклассников. Не забудьте обосновать свой ответ.

5. Можно ли разрезать прямоугольник 5×6 клеток на пентамино (фигуры из 5 клеток) так, чтобы фигурок каждого вида получилось не больше двух, а разрезание получилось симметричным относительно вертикальной и горизонтальной осей. Разрезание называется симметричным, если линии разрезов совмещаются при складывании вдоль оси. Объясните свой ответ.

6. Новая претендентка на должность фрейлины Капризной Принцессы должна назвать такие два числа — четырехзначное и трехзначное, что каждое из них делится на их разность. Принцесса заранее (для проверки) выписала на листочек все такие пары чисел. Сколько пар у нее получилось? Не забудьте обосновать свой ответ.

7. На доске написаны числа 1 и 2. Каждую минуту Петя вычисляет наибольший общий делитель двух имеющихся на доске чисел, и прибавляет его к одному из них (по своему усмотрению). Объясните, почему он не сможет выбирать таким образом, чтобы разность имеющихся двух чисел всегда оставалась меньше тысячи.

8. На листе бумаги изображены N кружков, в каждом из которых написано какое-то целое число от 0 до $N-1$. Докажите, что можно некоторые кружки соединить линиями так, что не менее половины чисел окажутся равными количеству линий, приходящих в этот кружок. Линии могут пересекаться.

9 класс

Сюжет 1

Будем называть многочлен с целыми коэффициентами разложимым, если он раскладывается в произведение многочленов меньших степеней с целыми коэффициентами.

1. При каких значениях параметра b квадратный трёхчлен x^2+7x+b будет разложимым?

2. Придумайте 2007 разложимых многочленов вида x^4+ax^2+25.

3. При каких значениях параметра a многочлен x^4+ax^2+7 будет разложимым?

4. Опишите все пары (a,b), для которых многочлен x^4+ax^2+b будет разложимым.

Сюжет 2

1. Из центра прямоугольника 5×4 вырезали доминошку (прямоугольник 1×2). Сколько способов разрезать остаток на доминошки?

2. Докажите, что при любом разрезании, описанном в предыдущем пункте, вертикально расположено нечетное количество доминошек.

3. Из центра прямоугольника 11×10 вырезали доминошку. Докажите, что если разрезать полученную фигурку на доминошки, то вертикально будут стоять не менее шести доминошек.

4. Из центра прямоугольника 11×10 вырезали доминошку. Докажите, что если её разрезать на угловые триминошки (квадратики 2×2 без одной клетки) так, чтобы не было триминошек без верхней левой клетки, то количество триминошек, у которых нет верхней правой или нижней левой клетки, делится на три.

Сюжет 3

Для каждых трех вершин n-угольника (где $n > 4$) отмечен центр проходящей через них окружности.

1. Любой центр совпадает с одной из двух заданных точек — A и B. Докажите, что исходный n-угольник вписанный.

2. Известно, что любой центр совпадает с одной из шести заданных точек. Докажите, что исходный n-угольник вписанный.

3. Для каждого натурального n приведите пример n-угольника, имеющего ровно $\frac{n^2-3n+4}{2}$ различных центров.

4. Найдется ли такое n, что у некоторого n-угольника будет больше одного, но меньше $\frac{n^2-3n+4}{2}$ различных центров?

10-11 класс

Сюжет 1

Назовем линейным трехчленом выражение вида $ax+by+c$, где a, b, c — какие-то вещественные числа, причём a и b одновременно не равны нулю, а x, y — переменные. Линейным неравенством будем называть неравенство вида $f(x,y) > 0$ или $f(x,y) < 0$, где $f(x,y)$ — линейный трехчлен.

1. Даны три линейных трехчлена. Докажите, что из них можно составить систему из трех линейных неравенств, не имеющую решений.

2. Дана система из четырех линейных неравенств, имеющая решение. Докажите, что можно изменить знак на противоположный в одном или в двух неравенствах так, чтобы получившаяся система не имела решений.

3. Дана система нестрогих линейных неравенств, имеющая решение. Известно, что если любые два знака неравенства в ней заменить на знаки равенства, то получившаяся система не будет иметь решений. Докажите, что можно отбросить все неравенства кроме каких-то двух так, чтобы получившаяся система (из двух неравенств) была равносильна исходной.

4. Дано n линейных трехчленов. Учитель предложил задачу: составить систему из n линейных неравенств, не имеющую решений, такую, что при замене любого из n знаков неравенства на противоположный получалась система, также не имеющая решений. Найдите минимальное n, при котором это возможно.

Сюжет 2

В этом сюжете рассматриваются такие наборы целых чисел, что всевозможные суммы k слагаемых различны, но есть две равные суммы $k+1$ слагаемого, где k — некоторое натуральное число.

1. Докажите, что чисел в таком наборе не меньше, чем $2k+2$.

2. Приведите пример такого набора для $k=2$.

3. Приведите пример такого набора для произвольного k.

4. Есть $2k+3$ целых числа. Все суммы по k разные. Докажите, что совпадений сумм $k+1$ слагаемых не более, чем $2k+1$.

Сюжет 3

Рассмотрим на плоскости четыре точки: A, B, C и D, и следующие три точки: P — точка перечения прямых AB и CD, Q — прямых AD и BC, и R — прямых AC и BD. Назовём получившиеся точки *сопутствующими* точкам A, B, C и D, а $\triangle PQR$ — *сопутствующим.*

1. Пусть на плоскости даны точки A, B, Q и R, причём никакие три из этих четырёх точек не лежат на одной прямой. Докажите, что можно единственным образом восстановить остальные точки: C, D и P.

2. Докажите, что для любого $\triangle PQR$ на плоскости есть хотя бы один невыпуклый четырёхугольник $ABCD$, для которого $\triangle PQR$ будет сопутствующим.

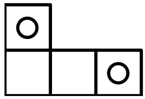
3. Пусть на плоскости дан $\triangle PQR$, и RM — его медиана. Найдите на этой медиане бесконечно много таких положений точки A, что можно построить выпуклый четырёхугольник $ABCD$, для которого $\triangle PQR$ будет сопутствующим, и бесконечно много положений вершины A, для которых можно построить невыпуклый соответствующий четырёхугольник.

4. Пусть на плоскости задано положение точек P, Q, R и точки A внутри $\triangle PQR$. Докажите, что существует не более одного четырехугольника $ABCD$, для которого $\triangle PQR$ будет сопутствующим.

Задачи второго (очного) тура

5 класс

1. У Васи есть конструктор из пяти деталей (см рисунок), которые можно соединять винтиками. Один винтик может соединить только две детали. Надо соединить все детали винтиками так, чтобы получилась квадратная пластина 4×4 клетки.



2. У двух малышей есть поровну карточек с буквами. У каждого ребёнка буквы не повторяются. Ребята смешали все карточки и стали составлять слова. Вначале они составили слово КЛОК, затем снова смешали карточки и составили слово ОКНО, затем — слово РОТОР. Докажите, что какая-то карточка осталась неиспользованной.

3. Сашенька написала на синей и на красной карточке одно и тоже число. Потом она отрезала от синей карточки последнюю цифру, а от красной карточки — две последние цифры. Теперь сумма чисел на двух красных кусочках равна 100, а на двух синих — 91. Какое число она написала на карточках? (Найдите все варианты).

4. В ряд растёт 200 деревьев. Всего есть 100 видов деревьев, каждого вида – по 2 дерева. Одним из этих ста видов являются баобабы. Для любого вида, кроме баобабов, известно, что между деревьями этого вида растёт ровно 99 деревьев. Докажите, что между двумя баобабами также растёт ровно 99 деревьев.

5. Иван Царевич борется со Змеем-Горынычем. За день Иван Царевич может либо отрубить большую голову, и тогда немедленно появятся три маленьких, либо отрубить маленькую — тогда тут же появятся три больших, либо же взять меч-кладенец и отрубить одну большую голову, и никаких новых голов не появится. В начале у Змея-Горыныча было 7 больших голов и ни одной маленькой. Может ли Иван Царевич победить его ровно за семь недель битвы?

6. На каждом этаже 101-этажного дома жило по квартиросъемщику. Вот как-то раз каждый из них переехал на один или два этажа вверх или вниз, и теперь снова на каждом этаже живет по квартиросъемщику. Докажите, что какие-то два человека, ранее жившие на соседних этажах, теперь живут через этаж.

7. Королевский повар испек королю пирог в виде клетчатой доски 30×30. Король обещал выделить самому повару кусок $1 \times k$, вырезав его из пирога по своему усмотрению. Повар хочет заранее разметить пирог на дольки 1×3 таким образом, чтобы, при любом выборе короля, ему досталась хотя бы одна целая долька. При каком наименьшем k это возможно?

6 класс

1. Папа купил Маше и Саше по одинаковой колоде карточек с буквами (на каждой карточке написано по одной букве). Ребята смешали все карточки и стали составлять слова. Сначала они составили слово ПАПА. Потом они вновь смешали карточки и составили слово МАМА. Потом — МАША, а потом — САША. Известно, что была ровно одна карточка, которая ни разу не выкладывалась на стол. Что написано на этой карточке?

2. В ряд растёт 200 деревьев. Всего есть 100 видов деревьев, каждого вида по 2 дерева. Одним из этих ста видов являются баобабы. Для любого вида, кроме баобабов, известно, что между деревьями этого вида растёт ровно 99 деревьев. Докажите, что между двумя баобабами растёт ровно 99 деревьев.

3. Придумайте такое число, что если его умножить само на себя, то у результата сумма цифр будет меньше, чем у исходного числа.

4. На скамейке сидит 5 человек — Алексей, Арсений, Демьян, Евгений и Кирилл. Известно, что у любых двух соседей есть хотя бы две общие буквы в имени. Зато у любых трёх подряд сидящих в их именах нет ни одной общей буквы. Какие ребята сидят по краям?

5. У человека есть 3 настоящие и 3 фальшивые монеты. В его городе живёт эксперт, которому на экспертизу можно дать 3 монеты. Эксперт сообщает, каких монет в этом наборе больше — настоящих или фальшивых. Как за три обращения к эксперту можно гарантированно найти хотя бы одну настоящую монету?

6. На доске 8×8 клеток в каждую клетку написали натуральное число. Известно, что в любых двух T-тетрамино суммы чисел разные. Докажите, что одно из чисел на доске не меньше 43.

7. Имеется кучка из 2000 камней. Инна и Алла играют в следующую игру — за ход любую кучку (по крайней мере из 3 камней) можно разделить на 3 (в каждой не менее 1 камня). Проигрывает тот, кто не может походить. Первой ходит Инна. Кто может обеспечить себе победу?

7 класс

1. На стол положили рядом три кубика, на гранях которых одинаковым образом расставлены цифры от 1 до 6. Кубики повернуты так, что если смотреть спереди, то видно число 131, сзади 464, а сверху – 253. Какое число снизу?

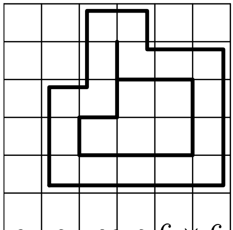
2. Расставьте 24 рыцаря и 25 лжецов на доске 7×7 так, чтобы каждый из них мог сказать: “Рядом со мной стоит ровно один рыцарь”. Как обычно, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Люди считаются стоящими рядом, если у занимаемых ими клеток есть общая сторона.

3. У Васи есть набор из четырёх палочек. Он сложил из них прямоугольник. Затем его друг Петя попытался сложить из тех же палочек треугольник, но оказалось, что, используя все четыре палочки сразу, это невозможно. Каким этот прямоугольник мог быть? Найдите все варианты и объясните, почему других не может быть.

4. Алиса расставила 10 чисел по кругу. Чеширский Кот посмотрел на эти числа и заметил, что как ни разделить круг на две половинки (по 5 чисел в каждой), ровно в одной половинке произведение будет делиться на 2. Сколько чётных чисел могло быть среди написанных Алисой? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

5. На следующий день Алиса расставила по кругу 100 чисел. Теперь Чеширский Кот обнаружил, что при любом разделении круга на половинки ровно в одной из них произведение делится на 8. Сколько чётных чисел на этот раз может быть среди расставленных? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

6. Бревно длиной 15 метров распилили на 5 частей: 1, 2, 3, 4 и 5 метров (считая слева направо). После этого сделали ещё несколько дополнительных распилов. Оказалось, что после этих распилов каждый получившийся кусочек длиннее своего правого соседа. Какое наименьшее количество брёвнышек могло получиться?



7. “Контуром” на клетчатой доске будем называть замкнутый маршрут ладьи, по каждой клетке которого ладья проходит ровно один раз. Можно ли разбить клетки доски 8×8 на пары так, чтобы на любом контуре были обе клетки какой-то пары?

Примечание. На рисунке показан пример контура на доске 6×6. Заметим также, что простейшим контуром является квадрат 2×2, но полоска шириной 1 контуром не является.

8. На доске 45×45 провели 12 разрезов по линиям сетки (все разрезы идут от края до края доски). Докажите, что среди получившихся прямоугольников найдутся два одинаковых.

9. У 40 мальчиков было 111111 карточек (всего). Каждую минуту кто-нибудь из них раздавал свои карточки поровну остальным. Могла ли эта затея продолжаться в течение дня?

8 класс

1. На доске 7×7 расставьте 24 рыцаря и 25 лжецов так, чтобы каждый из них мог сказать: “Рядом со мной стоит ровно один рыцарь”. Как обычно, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Люди считаюся стоящими рядом, если у занимаемых ими клеток есть общая сторона.

2. Можно ли на прямой отметить точки A, B, C, D, E таким образом, чтобы $AB = 14$, $BC = 16$, $CD = 12$, $DE = 8$, $AE = 16$ см?

3. Пятнадцатиметровое бревно распилили на 5 частей длиной $1, 2, 3, 4, 5$ метров (считая слева направо). Затем сделали ещё несколько дополнительных распилов. После этого оказалось, что теперь, наоборот, каждый кусочек длиннее, чем его правый сосед. Докажите, что брёвнышек получилось не менее 25.

4. Верно ли, что $2^6 + 2^5 7^3 + 2^4 7^3 + 2^3 7^6 + 2^2 7^6 + 7^9$ является простым числом?

5. Ингвар написал на карточках всевозможные трехзначные числа без нулей в десятичной записи. Аскольд разрезал каждую карточку на две части так, что из каждого числа получилось одно двузначное и одно однозначное. Хельга перемножила все числа на получившихся обрывках. Найдите 90-ю с конца цифру получившегося произведения.

6. Есть три кучки камней. Двое играют в следующую игру: за ход можно взять из одной кучки любое количество камней и разделить их между двумя остальными произвольным образом (в каждую кучку нужно кинуть не менее одного камня). В тот момент, когда во всех кучках было по 2007 камней, к одной из них подошёл скорпион. Теперь в эту кучку можно только кидать камни, но брать их из неё нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

7. Есть три одинаковые плитки в форме прямоугольного треугольника с углами 30° и 60°. Вася составил из них всех один большой треугольник. Петя утверждает, что может составить из тех же плиток (тоже всех трех) другой по форме треугольник. Прав ли Петя?

8. На 1001 карточке написано по целому неотрицательному числу. Сумма чисел на всех карточках равна 999. Вальтер хочет разбить карточки на две группы так, чтобы в каждой группе сумма чисел была меньше количества карточек в этой группе. Докажите, что он сможет сделать это не менее, чем 1000 способами.

9. У короля есть n городов. Он собирает проекты проведения n дорог между этими городами. Главное требование к проекту — чтобы между любыми k городами проходило не более k дорог (при любом $k < n$). Ужасностью проекта называется число 2^{x-y}, где x — число несвязанных частей, на которые распадается страна при данном проекте, y — количество пар городов, соединенных ровно двумя дорогами. Найдите сумму ужасностей всех проектов.

9 класс

Сюжет 1

Аким написал на доске натуральное число, затем стёр каждую из его цифр и заменил на вдвое большее число (например, число 239533 он заменил бы на 46181066). Такое преобразование числа назовём преобразованием Акима.

1. В исходном числе было 100 знаков, и оно при преобразовании Акима увеличилось в два раза. Какой максимальной могла быть сумма цифр этого числа?

2. Докажите, что не существует такого числа, которое преобразованием Акима увеличивается в 19 раз.

3. Найдите все числа, которые при преобразовании Акима увеличиваются ровно в 17 раз.

4. С неким числом 100 раз проделали преобразование Акима. Оказалось, что в полученном числе больше половины цифр одинаковы. Что это за цифра? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

Сюжет 2

Виталий и Глеб играют в игру на клетчатом поле. За ход можно обвести одну из линий сетки от края до края поля. Края доски уже обведены. Первым ходит Виталий. Проигрывает тот, после хода которого все стороны какой-то клетки окажутся обведены. Кто выигрывает на поле:

1. 1×1000?

2. 1×11?

3. 200×7?

4. 11×11?

Сюжет 3

Есть квадрат со стороной длины 1 км. По его диагоналям со скоростью 10 км/ч бегают два бегуна (каждый по своей диагонали, когда добегает до конца диагонали, разворачивается и бежит в противоположную сторону с той же скоростью).

1. Докажите, что в какой-то момент расстояние между бегунами будет не меньше $\sqrt{2}/2$ км.

2. Докажите, что когда-нибудь расстояние между бегунами будет не больше, чем $1/2$ км.

3. Найдите, каким наибольшим может быть минимальное из этих расстояний.

4. Докажите, что если в какой-то момент расстояние было меньше m м, то в какой-то другой момент оно будет больше $(1000 - m)$ м.

10-11 класс

Сюжет 1

1. Существуют ли такие многочлены $P(x)$ и $Q(x)$, что для любого x из интервала $(0, \pi/2)$ выполнялось бы равенство $\frac{P(\cos x)}{Q(\sin x)} = \mathrm{tg} x$?

2. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что для любого x из интервала $(0, \pi/2)$ выполнялось бы равенство $\sin x = P(\mathrm{tg} x)$?

3. Для каких натуральных чисел n существуют такие многочлен $P(x)$ степени n и многочлен $Q(x)$ произвольной степени, что для любого x из интервала $(0, \pi/2)$ выполнялось бы равенство $\mathrm{tg} x = \frac{P(\sin x)}{Q(\cos x)}$?

4. Какое наибольшее количество корней на интервале $(0, \pi/2)$ для данного натурального числа n может иметь уравнение $\sin x = P(\cos x)$, где $P(x)$ — произвольный многочлен n-ой степени?

Сюжет 2

Точки A и B на плоскости соединены ломаной так, что выполнены следующие условия:
(I) двигаясь от A к B по данной ломаной, мы всё время удаляемся от A;
(II) двигаясь от A к B по данной ломаной, мы всё время приближаемся к B.

Кроме того, длина отрезка AB равна 1 см.

1. Докажите, что любой отрезок такой ломаной, кроме начального и конечного, лежит между основаниям перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую, содержащую этот отрезок.

2. Пусть A и B соединены двузвенной ломаной так, что выполнены условия (I) и (II). Найдите максимально возможную длину такой ломаной.

3. Пусть A и B соединены трёхзвенной ломаной так, что выполнены условия (I) и (II). Найдите максимально возможную длину такой ломаной.

4. Верно ли, что ломаные, удовлетворяющие условиям (I) и (II) (и соединяющие данные точки A и B), могут иметь сколь угодно большую длину?

Сюжет 3

1. Даны две арифметические прогрессии, каждая из которых состоит из четырёх членов. Известно, что сумма любых двух членов первой прогрессии — член второй прогрессии. Докажите, что разность первой прогрессии равна 0.

2. Даны две бесконечные в обе стороны арифметические прогрессии с положительными разностями. Известно, что сумма любых двух чисел из одной прогрессии — член другой прогрессии, и наоборот, сумма любых двух чисел из второй прогрессии — член первой прогрессии. Докажите, что разности этих прогрессий равны.

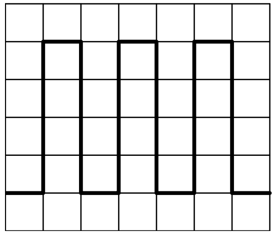
3. Для каких вещественных чисел x найдутся такие две прогрессии, обладающие свойством из предыдущего пункта, что одна из них содержит число 2007, а другая — число x?

4. Даны две бесконечные в обе стороны арифметические прогрессии. Известно, что произведение любых двух чисел из одной прогрессии — член другой прогрессии, и наоборот, произведение любых двух чисел из второй прогрессии — член первой прогрессии. Докажите, что куб любого члена любой из этих прогрессий является целым числом.

Решения первого (заочного) тура

Решения задач 5–6 классов

1. Одно из возможных разрезаний:



2. Ответ: первый назвал число 1, второй – 2, третий соврал и назвал 1.

Начнем решение с того, что покажем, что спортсмен, пришедший третьим, соврал.

Предположим, он сказал правду. Мы знаем, что нельзя назвать число меньше 1. Значит, пришедший первым назвал число не меньше 1, пришедший вторым назвал число не меньше 1, а пришедший третьим сказал правду и назвал число 3. Значит, сумма их ответов не меньше чем $1 + 1 + 3 = 5$ и не может равняться 4. Противоречие.

Значит, третий спортсмен соврал. Тогда первые двое сказали правду и назвали числа 1 и 2 соответственно. Значит, третий спортсмен назвал число $4 - 1 - 2 = 1$.

3. Ответ: у Маши 12 воздушных шариков. Приведем два способа решения.

Первый способ.

Заметим, что если Маша может отдать половину своих шариков, то количество ее шариков нацело делится на два. Аналогично, если она может отдать $\frac{2}{3}$ своих шариков, оставив себе только треть, количество ее шариков делится нацело также и на три. Т.о. оно делится на шесть.

Если у Маши всего 6 шариков, то у Саши 44 шарика. В этом случае, если Маша подарит Саше половину своих шариков, то у него станет 47 шариков, что больше 45 и противоречит условию.

Если у Маши всего 12 шариков, то у Саши 38 шариков. Если Маша отдает Саше половину своих шариков, то у него получается 44 шарика, что меньше 45, а если Маша отдает Саше две трети своих шариков, то у него получается 46 шариков, что больше 45. Этот вариант подходит.

Если у Маши по крайней мере 18 шариков, то, после того как она отдаст Саше две трети своих шариков, у нее останется не меньше 6 шариков, следовательно, у Саши будет не больше 44 шариков, что противоречит условию.

Второй способ. Обозначим за C кол-во воздушных шариков у Саши, через M – у Маши. Из условия видно, что $C + \frac{M}{2} < 45$, $C + 2 \cdot \frac{M}{3} > 45$. Значит, $\frac{M}{2} > 5$, а $\frac{M}{3} < 5$. Отсюда $M > 10$, и $M < 15$.

Теперь заметим, что если Маша может отдать половину своих шариков, то количество ее шариков нацело делится на два. Аналогично, если она может отдать $\frac{2}{3}$ своих шариков, оставив себе только треть, количество ее шариков делится нацело и на три. Но от 10 до 15 только одно число нацело делится и на 2, и на 3 – это 12.

Проверим, что у Маши действительно могло быть 12 воздушных шариков. Тогда у Саши 38 и выполнены условия передачи $38 + 6 \leq 44$ и $38 + 8 \geq 46$. Значит, у Маши 12 воздушных шариков.

4. Заметим, что через неделю положение лягушки изменилось. Предположим противное: через неделю лягушка осталась на том же месте. Тогда она сделала одинаковое количество прыжков "влево" и "вправо" от Костромы. Но это невозможно, так как в неделе 7 дней, а 7 не делится на 2.

Значит, за первую неделю лягушка сделала "шаг" по крайней мере на 50 км в одну сторону. Во вторую неделю, повторив все действия первой, она сделала тот же "шаг" и т.д. Таким образом, за первые 4 недели лягушка сделала по крайней мере 4 "шага" и отошла от Костромы не менее, чем на 200 км. До конца месяца у нее осталось не больше трех дней, а значит она сможет пройти не более 150 км и не вернется в Кострому.

5. Ответ:

2	6	3
1	24	12
16	8	4

6. Ответ. Возможны только два таких варианта:

$$3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 6$$

$$7 \quad 8 \quad 6 \quad 9 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 4$$

Рассмотрим числа, под которыми написаны две последовательные единицы. Т.к. Гена записал числа по одному разу, крайние числа отличаются на 2. Поэтому предпоследнее и четвертое с конца числа отличаются на 2, а перед четвертым числом стоит отличающееся от него на 2 в другую сторону. Таким образом, числа от предпоследнего числа к началу отличаются на 1, еще раз на 1, затем на 2, затем на 4 (в одну сторону), т.е. разница между первым и последним равна 8, следовательно, это числа 1 и 9. Т.о. от четертого до предпоследнего строчка чисел Гены либо 1, 5, 7, 8, 9, либо 9, 5, 3, 2, 1.

В обоих случаях для последнего и для третьего числа остается только по одному варианту. После чего и первые два числа восстанавливаются однозначно.

7. Ответ: в школе 40 третьеклассников.

Первый способ решения. Сначала заметим, что в сумме было получено и подарено поровну подарков. Т.о. второклассники и третьеклассники подарили больше, чем получили, ровно на столько же, на сколько первоклассники получили больше чем подарили.

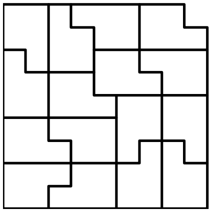
Посмотрим, на сколько больше получили первоклассники относительно того, сколько они подарили. Каждый первоклассник получил на 5 подарков больше, а значит все первоклассники — на количество первоклассников, умноженное на 5. Аналогично, второклассники подарили больше, чем получили, на количество второклассников, а третьеклассники — на удвоенное количество третьеклассников, и это равно количеству второклассников, умноженному на 4 (ведь третьеклассников в 2 раза больше, чем второклассников). Получается, что в сумме второклассники и третьеклассники подарили подарков больше, чем получили, на количество второклассников, умноженное на 5. Мы уже выяснили, что второклассники и третьеклассники подарили больше, чем получили, ровно на столько же, на сколько первоклассники получили больше, чем подарили. Но тогда количество первоклассников, умноженное на 5, равно количеству второклассников, умноженному на 5, а значит, учеников первого и второго класса поровну. Таким образом, количество третьеклассников равно удвоенному количеству второклассников, и количество детей в первых трёх классах равно удвоенному количеству третьеклассников, то есть равно 80. Значит, третьеклассников 40 человек.

Второй способ решения (для тех, кто знает уравнения).

Обозначим количество первоклассников буквой x, второклассников — буквой y, третьекласников — буквой z. Тогда $x+y+z=80$ и $z=2y$. В условии сказано, что второклассники подарили подарков на y больше, чем получили, а третьеклассники — на $2z$. Первоклассники, наоборот, получили подарков больше, чем подарили, на $5x$. Так как все подарки были вручены внутри школы, то $5x=y+2z$.

Подставим в последнее уравнение $x=80-y-z$ и затем $z=2y$. Получим уравнение $5(80-y-2y)=y+2(2y)$. Решая уравнение, находим $y=20$, и, следовательно, $z=40$.

Решения задач 7–8 классов



1. В этой задаче существует много вариантов сложить квадрат 9×9 без угловой клетки из фигурок данной в условии формы. Например:

2. Сумма всех мест равна $1 + 2 + ... + 10 = 55$, что на 8 больше суммы ответов всех спортсменов. Все, кроме одного участника, сказали правду, следовательно, его место на восемь больше, чем сказанное им число. Если его ответ больше двух, то его место должно быть больше 10, чего не может быть, так как мест всего десять. Остаётся два возможных варианта: он сказал, что занял второе место, но на самом деле был десятым, или что он занял первое место, а был девятым.

3. В этой задаче есть много вариантов расстановки бирок на шляпках гвоздиков. Приведем два из них:

1	13	8	2
6	16	5	15
10	12	9	11
4	14	7	3

1	7	2	8
13	11	14	12
4	6	3	5
16	10	15	9

4. Ответ: в школе 60 третьеклассников.

Пусть П — количество первоклассников, В — второклассников, Т — третьеклассников. Тогда по условию $П + В + Т = 140$ и $Т = 2В$, откуда $П+3В = 140$, $П = 140-3В$. Разность количества подаренных подарков и количества полученных равна $1В+2Т-3П$. Но количество подаренных подарков равно количеству полученных, поэтому $1В + 2Т - 3П = 0$. Следовательно $В + 2Т = 3П$, а поскольку $Т = 2В$, то $В + 2 \cdot (2В) = 3П$. Подставим $П = 140-3В$ и получим, что $5В = 3(140-3В)$, $5В = 420-9В$, $14В = 420$, $В = 30$. А количество третьеклассников $Т = 2В = 2 \cdot 30 = 60$.

5. Требуемое разрезание невозможно. Приведем два доказательства этого.

Первый способ.

Предположим, что так разрезать можно. Тогда пентамино всего 6 штук.

Пусть наш прямоугольник расположен, как указано на рисунке ниже. Будем называть вертикальную ось симметрии ”осью В”, а горизонтальную — ”осью Г”.

Ось В не может пересекать никакое пентамино, так как тогда оно будет разбиваться ею на две симметричные части, причем в каждой целое число клеток, и в сумме получим чётное число клеток, но в пентамино их пять. Если какое-то пентамино не пересекает обе оси симметрии, то симметричных ему фигур будет ещё 3 штуки, но по условию всего фигур одинаковой формы должно быть не более двух.

Значит, каждое из 6 пентамино пересекает ось Г, а поскольку на этой оси всего 6 клеток, то у каждого пентамино на ней лежит ровно по одной клетке. Остальные четыре клетки должны лежать симметрично относительно оси Г, две сверху, две снизу. Расположить эти пары клеток, чтобы получились разные пентамино, можно только двумя способами: горизонтально, получится "С"-пентамино, и вертикально, получится прямое пентамино (то есть 1×5).

Но каждого вида фигурок должно быть не более двух, то есть всего не более 4-х пентамино, а нам нужно шесть. Значит, мы получили противоречие, и такое разрезание невозможно.

Второй способ.

1	5			7	3
2	6			8	4

Так же, как и в первом варианте решения, объясняется почему никакое пентамино не может пересекать вертикальную ось симметрии.

Рассмотрим угловые клетки прямоугольника, на рисунке они пронумерованы от 1 до 4. Если бы клетки 1 и 2 принадлежали различным фигурам, то из-за симметрии относительно горизонтальной оси эти фигуры должны быть одинаковыми.

Учтя симметрию относительно вертикальной оси, получаем еще две таких же фигуры, содержащие остальные угловые клетки — 3 и 4. Но в условии не допускается больше двух фигур одинаковой формы. Поэтому, если бы требуемое разрезание было возможным, то клетки 1 и 2 должны были бы принадлежать одному пентамино. Но такое пентамино возможно только одного вида — вертикальное прямое пентамино (1×5). По симметрии клетки 3 и 4 тоже принадлежат вертикальному прямому пентамино.

Аналогичным рассуждением можно убедиться, что клетки 5 и 6 тоже обязаны принадлежать одному пентамино, которое также получается прямым, и мы снова пришли к необходимости иметь больше двух фигур одной формы.

Итак, требуемое разрезание невозможно.

6. Ответ: описанных в условии пар чисел 999.

Пусть есть пара таких чисел: четырёхзначное p и трёхзначное q, что они оба делятся на их разность $d = p - q$. Тогда $q = kd$, и тем самым $p = q + d = kd + d = (k+1)d$. Так как d делитель q, то d — не более чем трёхзначное число.

Для каждого значения d от 1 до 999 существует единственное k, такое, что kd ещё трёхзначное число, а $(k+1)d$ — уже четырёхзначное. Итак, каждому значению разности d от 1 до 999 соответствует ровно одна пара подходящих чисел, и все пары таким образом будут найдены. То есть, общее количество таких пар равно 999.

7. Докажем от противного. Предположим, что есть способ так действовать, что разность между числами будет оставаться не больше тысячи.

Во-первых, с каждой операцией НОД не уменьшается. В самом деле, если у нас были числа a и b, и их НОД равен d, то число d будет делителем и $a+d$ и $b+d$, и, независимо от выбора, НОД следующей пары чисел будет делиться на d, то есть будет не меньше d.

Во-вторых, НОД двух чисел всегда не больше их разности. То есть НОД всех пар в нашей последовательности будет оставаться не больше тысячи. Значит, с какого-то места НОД у всех пар будет один и тот же. Обозначим это число D.

Построим новую последовательность пар чисел — возьмем пары чисел из первой последовательности с того места, с которого они все делятся на D, и разделим их на D. Ясно, что в каждой паре теперь НОД равен единице (то есть они взаимно просты), и любые две соседние пары отличаются прибавлением единицы к одному из чисел. При этом разность чисел в каждой паре по-прежнему не больше тысячи.

Теперь покажем, что такая бесконечная последовательность пар взаимно простых чисел, разность которых всегда меньше тысячи, существовать не может. Поскольку последовательность бесконечна, а разность ограничена, то оба числа в последовательности растут неограниченно. Также, они никогда не могут стать равными, поэтому меньшее в паре всегда остается меньшим.

Рассмотрим число P — произведение всех простых чисел от 2 до 1000. Так как числа увеличиваются на 1, то будет первый момент, когда меньшее из чисел станет равным P. Тогда большее из чисел должно лежать в интервале от $P+1$ до $P+1000$. Но любое из чисел $P+k$ для k от 2 до 1000 имеет хотя бы один нетривиальный общий делитель с P, так как P делится на любое простое число от 2 до 1000. В этот момент большее число в паре должно быть равно $P+1$, иначе оно окажется не взаимно просто с меньшим. Но тогда на следующем шаге мы получаем либо два числа, равных $P+1$, и их НОД тоже равен $P+1$, либо большее число становится равным $P+2$, и их НОД становится равным 2.

Таким образом, такая последовательность пар чисел существовать не может, и разность чисел будет неограниченно увеличиваться.

8. Всего есть N кружков. Обозначим K — ближайшее сверху целое число к $N/2$, и L — ближайшее снизу целое число к $N/2$. (Они равны друг другу, если N чётно, и отличаются на единицу, если N нечётно, и в сумме всегда дают N.)

Обведём красным цветом те кружки, в которых стоят числа, меньшие чем K.

Если красных кружков оказалось больше либо равно половины от всех кружков, то обведем чёрным цветом ровно K из них. Случай, когда красных кружков оказалось меньше половины, разберем позже.

Для этих чёрных кружков будем обеспечивать равенство количества линий с числом в кружке. А именно, соединим каждый черный кружок с тем количеством нечёрных кружков, которое в нём написано. Это всегда возможно — у нас будет достаточное количество нечёрных кружков, поскольку их ровно L штук, а все числа в чёрных кружках не больше L. Так как из каждого чёрного кружка мы проводим линии только к нечёрным, и при этом разным, то понятно, что никакие два кружка не будут соединены более чем одной линией, и требование задачи выполнено.

Осталось разобрать случай, когда красных кружков меньше половины от всех. Тогда обведём чёрным ровно K некрасных кружков. Сперва соединим линией каждые два чёрных кружка. Теперь из каждого чёрного кружка выходит ровно $K-1$ линия. Поскольку в любом чёрном кружке стоит число от K до $N-1$, то из каждого из них осталость провести от 1 до L линий. У нас есть ровно L нечёрных кружков, к которым мы еще не проводили линий. Теперь проведем из каждого чёрного кружка к нечёрным столько линий, сколько не хватает. Так как нечёрных кружков ровно L штук, то их для этого хватит. Теперь требование задачи выполнено и в этом случае.

Решения задач 9 класса

Сюжет 1

Пусть многочлен с целыми коэффициентами и старшим кэффициентом 1 разложен в произведение многочленов с целыми коэффициентами. Очевидно, произведение старших коэффициентов должно быть равно старшему коэффициенту нашего многочлена, т.е. единице, следовательно, старшие коэффициенты либо оба равны 1, либо оба равны -1. Второй случай сводится к первому домножением обоих многочленов на -1. Поэтому достаточно рассматривать вариант, в котором старшие коэффициенты многогочленов равны 1.

1. Дан многочлен второй степени со старшим коэффициентом 1, следовательно он может раскладываться только в произведение многочленов первой степени со старшими коэффициентами 1. Обозначим их свободные члены c и d и запишем произведение: $(x+c)(x+d) = x^2+(c+d)x+cd$. Отсюда $c+d = 7$, а $b = cd$.

Ответ: трехчлен $x^2 + 7x + b$ будет разложим при b представимых в виде $c(7-c)$, где c — любое целое число, т.е. $0, 6, 10, 12, -8, -18, -30, \ldots$.

2. В качестве a можно взять числа вида $10 - c^2$, где c принимает значения $0, 1, 2, \ldots, 2006$ (или любые другие целые значения). Действительно, $x^4 + (10 - c^2)x^2 + 25 = x^4 + 10x^2 + 25 - c^2x^2 = (x^2 + 5)^2 - (cx)^2 = (x^2 + 5 + cx)(x^2 + 5 - cx)$.

3. Выясним, на какие множители может раскладываться многочлен $x^4 + ax^2 + 7$. Если этот многочлен раскладывается на три или больше множителей, то их можно сгруппировать и перемножить, следовательно, достаточно рассматривать разложение нашего многочлена на два множителя. Степень нашего многочлена 4, следовательно, сумма степеней многочленов, на которые его можно разложить, тоже должна быть 4. Т.о. достаточно рассмотреть два варианта: степени многочленов равны 2 и степень одного многочлена 3, а другого 1.

Покажем, что случай многочленов первой и третьей степени может быть сведен к случаю многочленов второй степени. Обозначим множитель первой степени $x - c$. Очевидно, число c является корнем нашего многочлена, т.е. $c^4 + ac^2 + 7 = 0$. Рассмотрим тождество $x^4 + ax^2 + 7 = (x^2 - c^2)(x^2 + (a + c^2)) + (7 + ac^2 + c^4)$. Т.к. c является корнем, получаем, что последняя скобка тождества должна быть равна нулю и получено разложение на произведение двух многочленов второй степени.

Рассмотрим теперь произведение многочленов второй степени. $(x^2 + c_1x + c_2)(x^2 + d_1x + d_2) = x^4 + (c_1 + d_1)x^3 + (c_1d_1 + c_2 + d_2)x^2 + (c_1d_2 + c_2d_1)x + c_2d_2$. Наш многочлен имеет нулевые коэффициенты при x^3 и x, поэтому $d_1 = -c_1$ и $c_1d_2 = -c_2d_1$. Рассмотрим варианты $c_1 = d_1 = 0$ и $c_1 = -d_1 \neq 0$.

I) $c_1 = d_1 = 0$. Из условий на коэффициент при x^2 и на свободный член имеем $c_2 + d_2 = a$, $c_2d_2 = 7$. Из второго равенства $c_2 = \pm 7, d_2 = \pm 1$ или $c_2 = \pm 1, d_2 = \pm 7$. Отсюда $a = \pm 8$.

II) $c_1 = -d_1 \neq 0$. Тогда $d_2 = c_2$ и из условия на свободный член имеем $c_2^2 = 7$. Это уравнение целых решений не имеет, следовательно, в этом случае многочлен не будет разложим ни при каких значениях a.

Ответ: $a = \pm 8$.

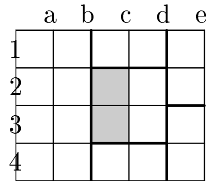
4. Как и в третьем пункте, наш многочлен можно разложить на два многочлена степени 2 с единичными старшими коэффициентами. Условия на коэффициенты при x^3 и x будут такие же, как в третьем пункте. Сохранится и условие на коэффициент при x^2, но изменится условие на свободный член. Рассмотрим последовательно оба варианта, сохраняя обозначения третьего пункта.

I) $c_1 = d_1 = 0$, $c_2 + d_2 = a$, $c_2 d_2 = b$.

II) $c_1 = -d_1 \neq 0$, $d_2 = c_2$, $c_2^2 = b$ и из условия на коэффициент при x^2 имеем $-c_1^2 + 2c_2 = a$.

Ответ: либо $a = m + k$ и $b = mk$, либо $a = 2m - k^2$ и $b = m^2$, где k и m — произвольные целые числа.

Сюжет 2



1. Как бы мы ни разрезали остаток прямоугольника на доминошки, через поле $c1$ должна проходить доминошка. Так как поле $c2$ вырезано, то эта доминошка направлена либо влево, либо вправо относительно поля $c1$, то есть, должна лежать либо на полях $b1$ и $c1$, либо на полях $c1$ и $d1$. Аналогично, доминошка, проходящая через поле $c4$ лежит либо справа, либо слева от него. Пусть одна из этих доминошек лежит справа, а другая слева. Тогда справа и слева остаётся по 9 клеток. Но 9 клеток нельзя разрезать на доминошки, поэтому либо обе упомянутые доминошки лежат справа, либо обе слева.

Посмотрим, сколько вариантов разрезать остальные клетки, если обе доминошки лежат справа. Проходящая через клетку $e1$ доминошка может быть направлена только вниз, проходящая через $e4$ — только вверх. Поэтому есть всего один вариант разрезать правый кусок. Посмотрим на левый кусок. Он представляет из себя прямоугольник 2×4. Мысленно разделим его на два квадрата 2×2 и разберём два варианта: когда есть доминошка, проходящая через оба квадрата, и когда нет. Если доминошка проходит между двумя квадратами, то, очевидно, расстановка доминошек восстанавливается однозначно. Если же нет, то четыре оставшиеся доминошки полностью лежат в одном из двух квадратов. Для каждого из квадратов есть два варианта его разрезать. Всего получается четыре варианта разрезания, плюс ещё один, когда есть доминошка, проходящая через два квадрата. Таким образом, когда обе доминошки, проходящие через вертикаль c, лежат по правую сторону, есть пять вариантов разрезания. Ясно, что есть столько же вариантов, когда они лежат по левую сторону. Значит, всего десять вариантов разрезания.

2. *Первый способ решения.*

Как уже было выяснено в предыдущей задаче, есть два варианта: когда обе доминошки, проходящие через вертикаль c, лежат по правую сторону, и когда по левую. Понятно, что они аналогичны, поэтому разберём только один из них (первый). В этом случае, как мы помним, справа будут вертикально стоять три доминошки. Слева же, есть два варианта: когда есть доминошка, проходящая через оба квадрата, и когда нет. Когда есть такая доминошка, то понятно, что слева будут стоять вертикально две доминошки. Когда нет, то в каждом из двух квадратов могут стоять вертикально ноль доминошек или две.

Как мы видим, слева в любом случае вертикально стоит чётное количество доминошек, а справа всегда ровно три. Поэтому всего вертикально стоять будет нечётное количество доминошек.

Второй способ решения.

Покрасим в синий цвет все клетки первой и треьей строки. Любая горизонтальная доминошка содержит либо ноль, либо две синих клетки (обязательно четное количество), а каждая вертикальная ровно одну. Всего синих клеток девять, т.е. нечетное число, следовательно, вертикальных доминошек тоже нечетное число.

3. Раскрасим наше поле вертикальными полосками шириной в одну клетку поочерёдно то в чёрный, то в белый цвет. Чёрных клеток получилось на 12 больше.

Заметим, что лежащая горизонтально доминошка занимает одну белую и одну чёрную клетку. Вертикальная же занимает две белых или две чёрных. Таким образом, разность в количестве между чёрными и белыми клетками определяется только вертикальными доминошками. Если их будет не больше 5, то и разница будет не больше 10, а она 12. Поэтому количество вертикально стоящих доминошек будет хотя бы 6.

4. Раскрасим поле в три цвета (красный, синий и зеленый) так, как показано на рисунке. Посчитав клетки разных цветов, несложно убедиться, что их одинаковое количество (по 36). Столько же будет и триминошек. Триминошка без верхней правой, так же как и без нижней левой клетки, содержит по одной клетке всех трёх цветов. Назовём эти два вида триминошек белыми. Надо доказать, что количество белых триминошек делится на три. Триминошка же без нижней правой клетки содержит две клетки одного цвета и одну другого, а именно, она может содержать две зелёных и одну красную (назовём такую триминошку зелёной), две синих и одну зелёную (такую назовём синей), либо же две красных и одну синюю (это будет красная). Таким образом, все триминошки у нас белые, красные, зелёные или синие.

с	к	з	с	к	з	с	к	з	с	к
к	з	с	к	з	с	к	з	с	к	з
з	с	к	з	с	к	з	с	к	з	с
с	к	з	с	к	з	с	к	з	с	к
к	з	с	к	з	-	к	з	с	к	з
з	с	к	з	с	-	з	с	к	з	с
с	к	з	с	к	з	с	к	з	с	к
к	з	с	к	з	с	к	з	с	к	з
з	с	к	з	с	к	з	с	к	з	с
с	к	з	с	к	з	с	к	з	с	к

Заметим, что триминошек должно быть столько же, сколько и клеток красного цвета. Также заметим, что белые и зелёные триминошки содержат по одной клетке красного цвета, красная — две, а синяя — ноль. Поэтому очевидно, что красных и синих триминошек должно быть одинаковое количество. Аналогично, красных будет столько же, сколько и зелёных. Т.е. должно быть одинаковое количество красных, синих и зелёных триминошек. Поэтому общее количество цветных триминошек делится на три. Но всего триминошек 36, что тоже делится на три, поэтому и количество белых триминошек кратно трём, что и требовалось доказать.

Сюжет 3

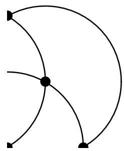
1. Докажем, что любые четыре вершины A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности (из этого следует вписанность многоугольника). Рассмотрим треугольники $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4, A_2A_3A_4$. По крайней мере у двух из них центры описанных окружностей совпадают. Так как эти треугольники имеют общие вершины, то и радиусы описанных окружностей совпадают. Следовательно, четвёртая вершина лежит на окружности, проходящей через остальные три.

2. В этом многоугольнике есть хотя бы 5 точек. Рассмотрим какие-то 5 из предложенных. Из этих пяти точек можно составить 10 треугольников. Центров шесть, значит, есть два треугольника среди этих 10, которым соотвествует один тот же центр O. Эти треугольники пересекаются хотя бы по одной вершине. Пусть эта вершина A. Тогда все вершины этих двух треугольников лежат на одном и том же расстоянии AO от точки O. Есть два варианта: либо эти два треугольника пересекаются по одной вершине - тогда все пять точек лежат на одной окружности. Если же по двум, то четыре точки из пяти находятся на одной окружности. Посмотрим на пятую точку B. Из этих 5 точек можно составить 6 треугольников, содержащих точку B, а различных центров всего 6. Значит, или какие-то два треугольника имеют один и тот же центр, или один из центров этих шести треугольников совпадает с O. Пусть один из центров — O. Тогда и оставшаяся пятая точка лежит на той же окружности, что и первые 4. Если же этот центр — не O, то хотя бы 4 различные точки из этих пяти, одна из которых B, лежат на одной окружности. Оставшиеся три точки, кроме B, лежат на одной окружности с центром в точке O. Но три точки могут лежать только на одной общуей окружности. Значит, эти окружности совпадают, и точка B тоже лежит на той же окружности, что и первые 4 точки.

Таким образом, так как мы брали произвольные 5 вершин, любые 5 точек многоугольника лежат на одной окружности. Зафиксируем какие-то 4 точки K, L, M и N. Если взять пятую точку X, то выяснится, что X лежит на той же окружности, что и K, L, M и N. То есть, все точки лежат на одной и той же окружности, что и требовалось дказать.

3. В качестве примера подойдет n-угольник $A_1A_2\dots A_n$, у которого $n-1$ вершина лежит на одной окружности с центром O, а оставшаяся вершина A_n на этой окружности не лежит. Действительно, для любых тр‘х вершин, не включающих вершину A_n, будет отмечена точка O, а для всех наборов трех вершин, включающих A_n, будут отмечены различные точки, отличные от O. Таким образом, всего будет отмечено $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1=\frac{n^2-3n+4}{2}$ точки.

4. Например, для $n=6$ подойдет расположение точек, изображенное на рисунке. На показанных окружностях лежит по четыре точки, кроме того центры окружностей, проходящих через внешние три точки и внутренние три точки, совпадают. Таким образом, всего отмечено центров $20-3\times3-1=10$. При этом $\frac{6^2-3\times6+4}{2}=11>10$, то есть приведенный шестиугольник удовлетворяет условию.



Решения задач 10-11 классов

Сюжет 1

Начнем с некоторых общих соображений. Заметим, что если f — линейный трехчлен, то уравнение $f(x,y)=0$ задает прямую, а соответствующие линейные неравенства задают полуплоскости. При этом, если неравенство строгое, то сама прямая не включается в эту полуплоскость, а если нестрогое, то включается. Системе же из нескольких линейных неравенств будет соответствовать пересечение соответствующих полуплоскостей. Таким образом, каждой системе линейных неравенств будет соответствовать либо одна из частей, на которые соответствующие прямые делят плоскость, либо пустое множество. (Отметим, что если две точки лежат в двух разных таких частях, то они лежат по разные стороны хотя бы одной из прямых, и значит, они не могут удовлетворять одному и тому же неравенству, связанному с такой прямой.)

На какое наибольшее число частей n прямых могут делить плоскость? Заметим, что если мы будем проводить прямые на координатной плоскости последовательно, то на k-ом шаге очередная, k-я прямая будет пересекать предыдущие прямые максимум в $k-1$ точке. Значит, эта прямая рассечет не более k предыдущих частей и общее количество частей возрастет не более, чем на k. Когда мы начинаем, у нас есть 0 прямых и одна часть (вся плоскость). Таким образом, n прямых рассекут плоскость не более чем на $1 + 1 + 2 + \cdots + n$ частей.

Приступим непосредственно к решению задачи.

1. Три прямые делят плоскость не более чем на 7 частей (это вполне очевидно геометрически и без приведенных выше общих соображений). С другой стороны, с каждым линейным трехчленом связано два (строгих) линейных неравенства, значит, из трех линейных трехчленов мы можем составить $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ систем линейных неравенств. Значит, какая-то из систем не соответствует ни одной из частей, на которые прямые делят поскость, и, поэтому, эта система не имеет решений.

2. Если граница области, являющейся решением данной системы, состоит из отрезков или лучей трех или менее прямых, то эта область целиком лежит в полуплоскости относительно некоторой (назовем ее четвертой) из наших прямых. Тогда, поменяв знак в соответствующем ("четвертом") неравенстве, мы получим систему, не имеющую решений. Если же граница области состоит из последовательных отрезков (или лучей) прямых 1, 2, 3, 4, то, например, прямые 1 и 3 не могут пересекаются внутри этой области, и треугольник (или полуполоса, если прямые 1 и 3 параллельны), образованный в пересечении первых трех прямых, очевидно, не пересекается четвертой прямой (т.е. является одной из областей, на которые прямые делят плоскость). Поменяв знаки во втором, а затем в четвертом неравенстве, мы получим систему, не имеющую решений.

3. Рассмотрим границу множества решений нашей системы нестрогих линейных неравенств. Она состоит из отрезков и лучей наших прямых или самих прямых. Если среди участков границы встречается отрезок или луч, то граница содержит пересечение некоторых двух из наших прямых (конец этого отрезка или луча). Тогда, заменив в двух неравенствах, соответствующих этим прямым, знаки неравенства на знаки равенства, мы получим систему, имеющую решение (которым как раз будет эта точка пересечения). Это противоречит условию, значит, граница данной обасти состоит только из целых прямых. Но тогда каждая из этих прямых не пересекается никакой из остальных прямых. Поэтому все прямые параллельны, и тогда, очевидно, граница нашей области может состоять либо из одной прямой (область — полуплоскость), либо из двух прямых (область — полоса). Ясно, что тогда отбрасывание неравенств, соответствующих всем остальным прямым, не изменит множества решений, т.е. приведет к системе, равносильной исходной.

4. Рассмотрим систему, состоящую из неравенств $x > 0, x+1 > 0, x+2 < 0, x+3 < 0$. Ясно, что даже если мы выкинем любое из неравенств (или изменим в нем знак), то из трёх оставшихся неравенств какие-то два будут противоречить друг другу. Поэтому при $n = 4$ задача, приведённая в условии, вполне может иметь решение. Если же $n = 3$, то, очевидно, среди трех пересекаемых полуплоскостей есть две пересекающихся. Тогда, заменив (если надо) знак в неравенстве, соответствующем третьей прямой, мы получим систему, имеющую решение, так что ситуация, описанная в условии, невозможна.

Сюжет 2

1. Обозначим это множество чисел за M. Пусть есть два набора A и B по $k+1$ числу, имеющие одинаковые суммы. Докажем, что они не пересекаются. Действительно, пусть у них есть общий элемент a. Выкинем его из обоих наборов. Получили два набора, состоящие из k чисел. Очевидно, что у них тоже равные суммы. Но по свойствам множества M этого быть не может. Получили противоречие, поэтому на самом деле наборы A и B не пересекаются. В множестве M есть два непересекающихся подмножества, в каждом из которых $k+1$ элемент, поэтому всего в множестве M по крайней мере $2k+2$ элемента, что и требовалось доказать.

2. Например, набор такой: 1, 10, 100, 2, 15, 94.

3. Рассмотрим два ряда чисел: $a_0 = 2^{2^k}$, $a_1 = 2^{2^{k+1}}$, $a_2 = 2^{2^{k+2}}, \ldots,$ $a_i = 2^{2^{k+i}}, \ldots, a_k = 2^{2^{2k}}$; $b_0 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 4, \ldots, b_i = 2^i, \ldots,$ $b_{k-1} = 2^{k-1}$, $b_k = 2^k - 1$. Заметим, что для любого $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ справедливо: a_i больше, чем удвоенная сумма всех a_j с меньшими индексами и чем все b_j.

Нашим множеством M будет множество всевозможных разностей и сумм вида $t_i = a_i - b_i$ и $s_i = a_i + b_i$ по всем $i = 0, 1, \ldots, k$. Докажем, что этот набор удовлетворяет условиям задачи. Для начала приведём два разных набора по $k+1$ числу, дающие одинаковые суммы. Это наборы $(a_0+b_0, a_1+b_1, \ldots, a_{k-1}+b_{k-1}, a_k-b_k)$ и $(a_0-b_0, a_1-b_1, \ldots, a_{k-1}-b_{k-1}, a_k+b_k)$. Теперь докажем, что наборов по k чисел с равными суммами нет. Будем доказывать от противного: пусть есть два таких набора N и K. Пусть в одном из этих двух наборов участвует a_k, а в другом — нет. Тогда одно только a_k больше, чем сумма всех остальных чисел обоих наборов, чего не бывает. Поэтому либо в обоих наборах участвует a_k, либо в обоих не участвует.

Пусть в одном из двух наборов участвует a_{k-1}, а в другом нет. Тогда, если из этого набора выкинуть a_{k-1}, то разность между двумя наборами будет не больше, чем удвоенная сумма всех a с меньшим, чем $k-1$ индексом, плюс сумма всех b, а это, как мы уже знаем, меньше, чем a_{k-1}. Поэтому, если a_{k-1} не выкидывать, то разность не получится равной нулю. Следовательно, либо в обоих наборах участвует a_{k-1}, либо в обоих нет. И так далее, до a_0.

Теперь заметим, что при вычитании суммы одного набора из суммы другого все a_i сократятся. Тогда заменим в обоих наборах t_i и s_i на b_i, и разность между суммами чисел наборов не изменится. В каждом наборе осталось по k чисел из множества $\{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$ с какими-то знаками, причём, если в одном наборе есть b_i с плюсом, то в другом оно есть с минусом, и наоборот: если в одном с минусом, то в другом с плюсом. Таким образом, теперь суммы наборов противоположны, а так как они должны быть равны друг другу, то они должны быть равны нулю. Посмотрим на тот набор, в котором b с максимальным индексом участвует с плюсом. Если это $k-1$, то сумма остальных чисел этого набора по модулю не больше, чем 2^k-2, что меньше, чем b_k. Если же максимальный индекс — $k-1$, то сумма остальных чисел набора равна $2^{k-1}-1$, что меньше, чем b_{k-1}. А меньше, чем $k-1$ максимальный индекс быть не может, так как чисел в наборе k. Таким образом, сумма чисел в оставшихся наборах не может оказаться равной нулю, хотя одна должна была быть таковой по предположению. Получили противоречие, поэтому таких двух наборов N и K быть не может.

4. Пусть есть наше множество M, в котором нет различных наборов по k чисел с одинаковой суммой. Для начала докажем, что если из него выделить $2k+2$ — элементное подмножество, то в этом подмножестве не будет двух пар $k+1$ элементных наборов чисел с одинаковой суммой.

Рассмотрим это подмножество N, которое разделяется на $k+1$ — элементные подмножества с равными суммами как $T \cup S$ и как $U \cup V$. Тогда N разделится на четыре множества: $A = T \cap U$, $B = T \cap V$, $C = S \cap U$ и $D = S \cap V$, причём, ни одно из них не пусто. Обозначим суммы элементов множеств A, B, C и D за a, b, c и d соответственно. Причём, как мы знаем, $a+b=c+d$ и $a+c=b+d$. Вычитая одно из другого, получим, что $b=c$. То есть, два множества не более, чем из k элементов имеют равные суммы. Дополнив эти множества какими-нибудь одинаковыми элементами до наборов из k чисел, получим два набора из k чисел с равными суммами, чего не бывает. Следовательно, подмножество N нельзя двумя способами разделить на два $(k+1)$-элементных набора чисел с равными суммами.

Когда мы из множества выделяем пару $(k+1)$-элементных наборов чисел с равными суммами, остаётся одно число.

Пусть для каких-то двух таких пар осталось одно и то же число. Это означает, что мы одно и то же $2k+2$ — элементное подмножество множества двумя способами разделили на два $k+1$ — элементных набора с равными суммами, а это, как мы уже знаем, невозможно. Поэтому каждой такой паре соответствует собственное оставшееся число. А так как чисел всего $2k+3$, то и таких пар может быть не больше, чем $2k+3$. Теперь проделаем с элементами нашего множества некоторые преобразования, которые переведут равные суммы k и $k+1$ его элементов в равные, а различные — в различные. Прежде всего, возьмём самое маленькое число и вычтем его из всех чисел. Теперь одно число равно нулю, а все остальные положительны. После чего, если в наборе будет нечётные числа, то оставим его в покое. Если же все числа оказались чётными, то поделим их всех на 2. Если нечётных чисел не появилось, то снова поделим на 2. И так далее, пока не появятся нечётные числа. Т. к. с одной стороны, мы всегда делим на два чётные числа, и от деления получаются натуральные, то числа будут постоянно оставаться натуральными. С другой стороны, от достаточно большого числа делений на 2 любое число станет меньше единицы. Поэтому в какой-то момент мы остановимся, и в этот момент у нас будут нечётные числа.

Пусть у нас есть $2k+3$ пары наборов по $k+1$ с равными суммами. Тогда, какое бы мы не выкинули число, всё остальное можно будет разбить на два набора с равными суммами. Это означает, что после выкидывания любого числа сумма остальных будет чётной. Но так как общая сума $2k+3$ чисел имеет фиксированную чётность, то все числа во множестве M одной чётности. Но там есть нуль и есть хотя бы одно нечётное число, следовательно, все эти числа не могут быть одной чётности.

Теперь, пусть есть хотя бы $2k+2$ таких пар. Тогда есть хотя бы $2k+2$ числа одной чётности, при выкидывании каждого из которых сумма остальных становится чётной. Пусть все эти числа чётные. Тогда там есть ровно одно нечётное число. Следовательно, общая сумма нечётна, и при выкидывании чётного числа сумма остальных тоже будет нечётной, а должна была быть чётной. Если же все эти $2k+2$ числа нечётны, то оставшееся число чётно, и общая сумма чётна. Поэтому при выкидывании одного нечётного числа сумма остальных чисел будет нечётной. Получили противоречие, поэтому в множестве M не больше, чем $2k+1$ пара наборов из $(k+1)$-го числа с равными суммами, что и требовалось доказать.

Сюжет 3

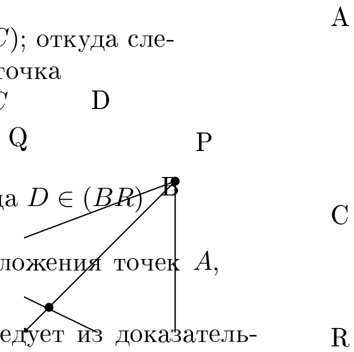
Будем обозначать прямую, проходящую через точки X и Y, как (XY), и записывать утверждение “точка Z лежит на прямой (XY)”

как $Z \in (XY)$. Пересечение двух прямых (XY) и (UV) в точке W будем записывать $W = (XY) \cap (UV)$.

1. По условию сюжета $R \in (AC)$ и $Q \in (BC)$; откуда следует, что $C \in (AR)$ и $C \in (BQ)$, поэтому точка $C = (AR) \cap (BQ)$. Таким образом, точку C можно восстановить единственным образом.

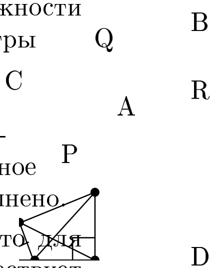
Аналогично, $R \in (BD)$ и $Q \in (AD)$, откуда $D \in (BR)$ и $D \in (AQ)$, и получаем $D = (BR) \cap (AQ)$.

Точка P определяется по условию из положения точек A, B, C, D однозначно.



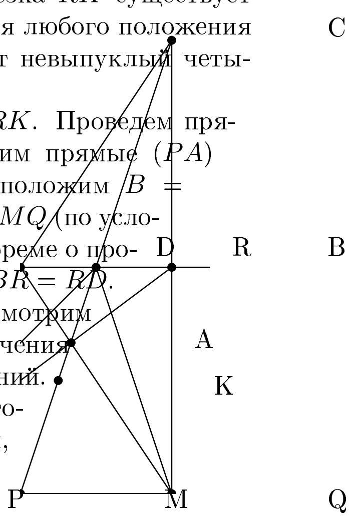
2. Заметим, что решение этого пункта следует из доказательства гораздо более сильного утверждения пункта 3, написанного ниже. Тем не менее приведём одну несложную конструкцию, отвечающую в точности на вопрос этого пункта сюжета.

Возьмём в качестве точки A центр вписанной окружности треугольника PQR, а в качестве точек B, C и D — центры трёх вневписанных окружностей. Поскольку центр вневписанной окружности лежит на пересечении биссектрис двух внешних углов треугольника и продолжения одной внутренней, то требуемое в условии взаимное расположение точек и прямых, их соединяющих, выполнено.



3. Пусть K — середина медианы RM. Докажем, что для любого положения точки A внутри отрезка RK существует выпуклый четырёхугольник $ABCD$, а для любого положения точки A внутри отрезка MK существует невыпуклый четырёхугольник $ABCD$.

Рассмотрим точку A внутри отрезка RK. Проведем прямую $a \| (PQ)$ через точку R. Продолжим прямые (PA) и (QA) до пересечения с прямой a, и положим $B = a \cap (PA)$, $D = a \cap (QA)$. Поскольку $PM = MQ$ (по условию) и $a \| (PQ)$ (по построению), то по теореме о пропорциональных отрезках получаем, что $BR = RD$. Так как $AR < AM$, то $DB < PQ$. Рассмотрим трапецию $PQBD$; в ней A — точка пересечения диагоналей, а M и R — середины оснований. Её основания не равны друг другу, поэтому прямые, содержащие боковые стороны, пересекаются. Из школьного курса планиметрии известно, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения бо-



ковых сторон лежат на одной прямой, тем самым прямые (PD) и (BQ) пересекаются в точке, лежащей на прямой (AR), и это будет точкой C. Точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежит по ту же сторону от бо́льшего основания, что и ме́ньшее основание, поэтому построенная точка C будет лежать на продолжении прямой (AR) за точку R, и четырёхугольник $ABCD$ получается выпуклым.

Для точки A на другой половине MK медианы RM строим ту же самую конструкцию. Как и в предыдущем случае, получается трапеция, в которой основания не равны друг другу, только BD становится бо́льшим основанием, а PQ — ме́ньшим, и C — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции — оказывается на продолжении прямой RM за точку M, откуда видно, что точки C и D лежат по разные стороны от прямой (AB), то есть четырёхугольник $ABCD$ — невыпуклый.

4. Нам даны положения точек A, P, Q, R. Мы знаем, что точки B, C, D должны лежать на прямых (AP), (AR), (AQ) соответственно. Кроме того, они должны быть выбраны на этих прямых таким образом, чтобы $P \in (CD)$, $Q \in (BC)$, $R \in (BD)$.

План доказательства: возьмём произвольно точку C на прямой (AR), после этого найдем положения точек B и D, потом исследуем условие $R \in (BD)$, и покажем, что положение C можно выбрать не более чем одним образом, чтобы это условие было выполнено.

Выберем систему координат следующим образом: началом будет точка A, а базисным векторами — $\overline{p} = \overrightarrow{AP}$ и $\overline{q} = \overrightarrow{AQ}$. Пусть в этом базисе $\overrightarrow{AR} = k\overline{p} + l\overline{q}$. Числа k и l — по сути параметры, задающие положение точки A относительно P, Q и R.

Точка B должна лежать на прямой AP, поэтому $\overrightarrow{AB} = b\overline{p}$, где b — некоторое не равное нулю вещественное число, и аналогично $\overrightarrow{AD} = d\overline{q}$, $\overrightarrow{AC} = tk\overline{p} + tl\overline{q}$. Число t однозначно задаёт положение точки C.

Выразим сперва числа b и d через число t.

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ} = tk\overline{p} + tl\overline{q} - \overline{q} = tk\overline{p} + (tl-1)\overline{q}$$

$$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AQ} = b\overline{p} - \overline{q}$$

.

$$\overrightarrow{QC} \| \overrightarrow{QB} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{tk}{b} = \frac{tl-1}{-1}$$

откуда $b = \frac{tk}{1-tl}$.

Заметим, что при некотором значении t это выражение не определено, это соответствует тому, что при некотором положении точки C построить подходящую точку B невозможно, так как прямые (CQ) и (AP)

оказываются параллельны. Это не мешает решению задачи, поскольку нам требуется доказать, что существует не более одного построения, и мы можем делать все алгебраические преобразования в предположении, что построение возможно и что все получающиеся формулы определены.

Аналогично легко получить $d = \frac{tl}{1-tk}$.

Таким образом, $\overrightarrow{AB} = \frac{tk}{1-tl}\overline{p}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{tl}{1-tk}\overline{q}$.

Исследуем условие $R \in (BD) \iff \overrightarrow{BR} \| \overrightarrow{DR}$:

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AB} = k\left(1 - \frac{t}{1-tl}\right)\overline{p} + l\overline{q}$$

$$\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AD} = k\overline{p} + l\left(1 - \frac{t}{1-tk}\right)\overline{q}$$

$$\overrightarrow{BR} \| \overrightarrow{DR} \quad \iff \quad \left(1 - \frac{t}{1-tl}\right) : 1 = 1 : \left(1 - \frac{t}{1-tk}\right)$$

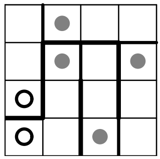
Из последней пропорции следует уравнение

$$\frac{t}{1-tl} + \frac{t}{1-tk} = \frac{t^2}{(1-tl)(1-tk)}$$

Поскольку $t \neq 0$ из геометрических соображений, это уравнение сводится к линейному уравнению относительно t. Как хорошо известно, линейное уравнение имеет не более одного решения, тем самым существует не более одного положения точки C на прямой (AR), при котором дальнейшее построение будет удовлетворять условию задачи.

Решения второго (очного) тура

Решения задач 5 класса



1. Можно, см. рисунок.

2. У каждого малыша имеется не более одной буквы О по условию задачи. Поскольку в слове ОКНО использованы две О, значит, у каждого ровно по одной карточке с буквой О. Точно также заключаем, что у них есть ровно по одной карточке с буквой Р и с буквой К. Кроме этих карточек были использованы еще 3 — с буквами Л, Н, Т. Поделить эти три карточки поровну между малышами никак нельзя, а по условию у них было поровну карточек (и повторившиеся карточки мы уже учли). Значит, какая-то карточка осталась неиспользованной.

3. Ответ: 892.

Сумма двух чисел на синих карточках равна 91. Одно из этих чисел однозначное, значит, второе из этих чисел (образованное всеми числами, кроме последней цифры) не меньше 81 и не больше 91, а исходное число трехзначное. Если бы его вторая цифра не превосходила 8, то число, образованное последними двумя цифрами, не превосходило бы 89. Тогда его сумма с первой цифрой была бы меньше 100, что противоречит условию. Следовательно, вторая цифра — 9, значит, число, образованное первыми двумя цифрами, — 89, и тогда третья цифра равна 91-89=2.

4. Разобьём наши деревья на пары — 1 и 101, 2 и 102,..., 100 и 200. По условию все деревья, кроме баобабов, растут через 99, то есть занимают ровно одну из выделенных пар. Таким образом все деревья, кроме баобабов, занимают 99 пар. Значит, баобабы занимают два оставшихся места, то есть оставшуюся пару.

5. Ответ: Нет, схватка не могла продолжаться ровно семь недель, т.е. 49 дней.

Если в ходе схватки Иван-Царевич отрубил обычным мечом четыре или более больших голов, то за время схватки у Змея выросло бы не менее $3\times4 = 12$ маленьких голов. Когда Иван-Царевич срубает маленькую голову, появляется 3 больших, значит, в ходе схватки появилось не менее $3 \times 12 = 36$ больших голов. Итак,в этом случае у Змея вырастает не менее $36 + 12 = 48$ голов, и еще 7 голов у него было вначале. Тогда Царевичу для победы потребовалось бы не меньше, чем $48 + 7 = 55$ дней.

Если же в ходе схватки Иван-Царевич отрубил всего обычным мечом три или менее голов, то за время схватки у Змея выросло не более $3 \times 3 = 9$ маленьких голов, а значит не более $3 \times 9 = 27$ новых больших голов (так как они возникают только при срубании маленьких). Итого максимум $9 + 27 = 36$ новых голов, плюс 7 первоначальных. Тогда схватка завершилась бы, самое большее, за $36 + 7 = 43$ дня.

6. Назовем две квартиры (и жильцов в них) парными , если при переезде эти жильцы просто обменялись квартирами (а квартиры — жильцами) друг с другом. Поскольку 533 — число нечетное, все квартиры не могли разбиться на пары, значит есть непарные квартиры.

Рассмотрим самую нижнюю из непарных квартир. Ее владелец — назовем его Тимофей — переехал на один или два этажа *вверх* (так как та квартира, в которую он переехал, также непарная).

Предположим, что Тимофей переехал на 2 этажа вверх. В его квартиру не мог переехать ни жилец снизу (все жильцы снизу разбиваются на пары), ни человек, живший двумя этажами сверху (ведь они не образуют пару). Если же в квартиру въехал жилец со следующего этажа, то они и есть бывшие соседи, теперь живущие через этаж.

Предположим, что Тимофей переехал на один этаж вверх. В его квартиру не мог переехать ни жилец снизу (все жильцы снизу рабиваются на пары), ни человек, живший этажом сверху (ведь они не образуют пару). Значит в эту квартиру прибыл человек, живший двумя этажами выше — пусть это будет девушка Анна.

Человек, живший вначале над Тимофеем, мог переехать на два этажа вверх или вниз — но тогда они с Тимофеем и есть бывшие соседи, теперь живущие через этаж, либо подняться на этаж вверх (внизу уже живет Анна). В этом последнем случае, они с Анной — бывшие соседи, теперь живущие через этаж.

7. Ответ: При $k = 8$. Опишем, как при таком k сделать разметку пирога, удовлетворяющую условиям задачи.

Разобьем весь пирог на большие квадраты 3×3 (это возможно, так как 30 делится на 3). Получившуюся "доску" из ста квадратов 3×3 раскрасим в шахматном порядке в черный и белый цвета. Теперь каждый черный квадрат 3×3 разделим на вертикальные дольки 1×3, а а каждый белый квадрат 3×3 — на горизонтальные дольки 1×3. Легко видеть, что любая горизонтальная полоска из 8 клеток пересекается по трем клеткам с двумя соседними квадратами нашей черно-белой сетки. Поскольку один из них разбит на горизонтальные дольки, то одна из них целиком лежит в нашей полоске. То же самое верно и для вертикальных 8-клеточных полосок.

Докажем теперь,что при $k = 7$ разметить доску требуемым образом нельзя (а тогда, разумеется, этого нельзя сделать и при $k < 7$).

Первый вариант доказательства.

Рассмотрим квадрат 17×17. Ясно, что если бы было возможно разметить квадрат со стороной 30, то можно было бы и со стороной 17. Предположим, что нам удалось так разметить, и придем к противоречию.

Посмотрим на вертикальный столбец 1×17 и накроем его тремя полосками 1×7: первую положим на клетки с 1 по 7, вторую — на клетки с 6 по 12, и третью — на клетки с 11 по 17. Никакие две из этих полосок не перекрываются по трём клеткам, и если в каждой из них есть размеченная долька 1×3, то эти дольки разные. Тем самым, в каждой вертикальной полоске 1×17 есть хотя бы три размеченных вертикальных дольки.

Посчитаем, сколько клеток во всех размеченных вертикальных дольках в нашем квадрате 17×17. Всего 17 столбцов, в каждом не меньше трех долек, в каждой дольке 3 клетки, то есть всего не менее $9 \cdot 17$ клеток.

Но совершенно аналогично, рассматривая строчки вместо столбцов, можно убедиться, что в горизонтальных дольках в нашем квадрате 17×17 тоже не менее $9 \cdot 17$ клеток. Поскольку никакая клетка не может быть одновременно и в вертикальной и в горизонтальной дольках, то всего клеток получается не менее $2 \cdot 9 \cdot 17$, но это больше чем всего клеток в квадрате 17×17. Значит, разметить квадрат со стороной 17 так, чтоб в любой полоске 1×7 была хотя бы одна целая долька 1×3, невозможно.

Второй вариант доказательства.

Предположим, что нам это все-таки удалось. Рассмотрим произвольную горизонтальную полосочку из 7 клеток "глубоко внутри доски" (например так, чтобы ее центральная клетка находилась на пересечении 15 строки и 15 столбца). Она должна содердать горизонтальную дольку 1×3. Назовем эту дольку именем Доль.

Рассмотим три вертикальных полоски 1×7, центральные клетки которых образуют Доль. Каждая из этих полосок должна содержать целую дольку 1×3 — лежащую либо прямо над Доль, либо прямо под Доль. Предположим, что две из этих долек лежат прямо под Доль (второй случай разбирается точно так же). Назовем эти вертикальные дольки Диль и Даль.

Пусть между Диль и Даль есть свободные клеточки. Тогда любая горизонтальная 7-клеточная полоска, центр которой — одна из этих (трёх) клеточек, очевидно, не может содержать ни одной целой дольки (с обоих концов осталось лишь по две свободных клеточки). Такого не может быть, поэтому Диль и Даль примыкают друг к другу сторонами.

Посмотрим теперь на три горизонтальные 7-клеточные полосочки, у каждой из которых две клеточки лежат на Диль и Даль, две слева от Диль и Даль, три — справа от Диль и Даль. Каждая из них должна содержать дольку, но это может быть только долька, образованная тремя правыми клетками. Значит, квадрат 3×3, находящийся слева от клеток Диль и Даль, разбит поваром на три горизонтальные дольки. Но тогда вертикальная полоска, центр которой находится в центре этого квадрата, не содержит ни одной (вертикальной) дольки. Противоречие.

Решения задач 6 класса

1. Так как наборы были одинаковые, то каждая буква встречалась не менее двух раз. В выложенных словах встречается всего одна буква С, поэтому на невыложенной карточке должна быть вторая её копия.

2. См. решение 2 задачи 5 класса.

3. Таких чисел много. Например, число 39.

4. Заметим, что у всех, кроме Кирилла, в имени есть буква “е”. Поэтому, если бы Кирилл сидел не посередине, то у троих подряд человек была бы общая буква “е”. Поэтому Кирилл сидит посередине. Заметим, что Демьян и Евгений рядом с Кириллом сидеть не могут, поэтому они сидит по краям.

5. Пронумеруем монеты 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Вначале отдадим эксперту монеты 1, 2 и 3. Если там больше фальшивых, то тогда настоящих больше среди монет 4, 5 и 6. После перенумеровки мы можем считать, что среди монет 1, 2 и 3 больше настоящих. Однако, у нас осталось всего 2 взвешивания. Заменим монету номер 1 на монету номер 4. Если теперь стало больше фальшивых монет, то понятно, что мы заменили настоящую на фальшивую. Т.е. мы нашли то, что требовалось. Так что осталось разобраться со случаем, когда среди монет 2, 3, 4 больше настоящих. Теперь аналогично заменим монету 2 на монету 5. Если стало больше фальшивых, то, как в предыдущем пункте получаем, что 2 — настоящая, а 5 — фальшивая. Если же по-прежнему больше настоящих, то 3 — настоящая, а 6 — фальшивая, потому что, если мысленно поменять 3 на 6, то у нас останутся 4, 5, 6 монеты, а мы знаем, что среди них больше фальшивых.

6. Посмотрим, сколько всего различных Т-тетрамино можно вырезать из нашей доски. Если её не вращать, то можно вырезать 42 способами. Поэтому всего способов — $42 \cdot 4 = 168$. С другой стороны, если все числа меньше 43, то максимальная сумма будет те же 168. Значит, если во всех Т-тетрамино суммы разные, все суммы от 1 до 168 встечаются по одному разу. Однако, сумма один встречаться не может, так как минимальная сумма $1+1+1+1=4$. Таким образом, такого быть не может и, значит, есть число не менее 43.

7. Выигрывает первый игрок — Инна. Для этого она должна играть следующим образом. Первым ходом она делит начальную кучку из 2000 камней на три кучки: 999, 2, 999. Далее, средняя кучка с 2 камнями в игре не участвует, так как с ней уже нельзя сделать хода.

Следующими ходами Инна будет обеспечивать симметричность кучек относительно середины — что бы ни сделала Алла с одной из кучек слева или справа от средней кучки, Инна может сделать то же самое с симметричной кучкой (справа или слева соответственно). Так как в любой момент после хода Инны ситуация симметрична, то какую бы кучку ни выбрала Алла для очередного хода, существует симметричная ей кучка для следующего хода Инны, поэтому Инна всегда сможет походить.

Так как с каждым ходом количество кучек увеличивается, то игра не может продолжаться бесконечно, и в какой-то момент следующий ход будет невозможен. Но у Инны, при этой стратегии, всегда есть следующих ход, поэтому проиграет Алла.

Решения задач 7 класса

1. Ответ: число 526.

Заметим, что все грани кубика делятся на три пары находящихся напротив друг друга. Выясним, какие пары цифр находятся на противоположных гранях.

Поскольку спереди число 131, а сзади 464, то цифра 1 находится напротив цифры 4, а 3 — напротив 6. Тогда оставшиеся два числа, 2 и 5, должны находиться друг напротив друга. Значит внизу, напротив числа 253, находится число 526.

2. В этой задаче существует много расстановок, здесь изображены две из них. Клетки с лжецами оставлены пустыми:

	Р	Р		Р	Р	
Р			Р			Р
Р			Р			Р
	Р	Р		Р	Р	
Р			Р			Р
Р			Р			Р
	Р	Р		Р	Р	

Р	Р		Р	Р		Р
		Р				Р
Р		Р		Р	Р	
Р						Р
	Р	Р		Р		Р
Р				Р		
Р		Р	Р		Р	Р

3. Ответ: только квадрат.

Напомним, что треугольник с заданными длинами сторон не существует тогда и только тогда, когда эти длины не удовлетворяют неравенству треугольника.

Обозначим длины сторон прямоугольника как a и b, причем $a \leqslant b$. Если мы попробуем сложить треугольник со сторонам b, b и $2a$, то по условию задачи у нас не получится это сделать, то есть должно нарушиться неравенство треугольника. Поскольку $b+2a > b$, то нарушаться должно неравенство $b + b > 2a$, то есть должно быть $b + b \leqslant 2a$. Тогда получаем, что $b \leqslant a$. Но мы выбирали обозначения так, что $b \geqslant a$, следовательно, $a = b$, то есть прямоугольник является квадратом.

4. Ответ: 1.

Заметим, что произведение целых чисел чётно тогда и только тогда, когда среди множителей есть чётное число (хотя бы одно). Если на круге только одно чётное число, то оно всегда попадает только в один полукруг, и только в нём произведение будет чётным.

Предположим, что на круге есть два чётных числа. Тогда круг можно разделить на два полукруга так, чтобы эти числа попали в разные половины, и в каждой из них произведение будет чётным, а это противоречит условию. Таким образом, на круге может быть не более одного чётного числа. Все числа нечётными быть не могут, так как иначе произведение в обоих полукругах всегда будет нечётным.

5. Ответ: от одного до пяти.

Заметим, что как и в предыдущей задаче, все числа нечётными быть не могут, поэтому там есть хотя бы одно чётное число.

Одно, два или три чётных числа может быть, например, если ровно одно из них равно 8, а остальные равны 2. Тогда в том полукруге, в котором нет числа 8, произведение всех чисел не может делиться на 8.

Четыре чётных числа может быть, например, если одно из них равно 4, а остальные три равны 2. Тогда либо три двойки попадают в один полукруг, а 4 — в другой, либо хотя бы одна 2 попадает в один полукруг с 4. В любом случае ровно в одном полукруге произведение будет делиться на 8.

Пять чётных чисел может быть например, если все пять равны 2. Действительно, тогда при любом разделении на два полукруга ровно в один из них попадает хотя бы три двойки.

Предположим, на круге стоит хотя бы 6 чётных чисел. Тогда существует способ разделить круг на два полукруга так, чтобы в каждом было хотя бы по 3 из них. В самом деле, рассмотрим какой-нибудь полукруг. Пусть в нем меньше 3 чётных чисел. Тогда в дополняющем его должно быть больше трёх. Повернем этот полукруг на одну позицию, количество чётных чисел при этом может измениться не более чем на 1. Продолжим поворачивать, пока не дойдем до полукруга, дополняющего исходный. Теперь в нем больше 3 чисел. Значит, должен быть промежуточный момент, в который количество чётных чисел было ровно 3, а значит и в дополняющем полукруге тоже было не менее 3. Тогда произведение в каждом полукруге будет делиться на 8, а это противоречит условию. Значит, 6 или более чётных чисел на круге стоять не может.

6. Ответ: 25 брёвнышек.

Докажем, что получится не менее 25 брёвнышек.

Посмотрим на распил первого (слева) бревна. Все получившиеся в результате этого распила брёвнышки по длине не больше 1. Значит, каждое брёвнышко, получившиеся из куска длины 2, по длине меньше 1. Отсюда следует, что из куска длины 2 получилось не менее трех брёвнышек. Тогда длина самого правого из этих брёвнышек меньше $\frac{2}{3}$.

Рассмотрим бревно длины 3. Его разрезали на брёвнышки длины менее $\frac{2}{3}$. Следовательно, этих брёвнышек было не менее $3 : \frac{2}{3} = \frac{9}{2}$, т.е. хотя бы 5. Тогда самое правое из этих брёвнышек по длине меньше чем $\frac{3}{5}$.

Рассмотрим бревно длины 4. Его разрезали на брёвнышки длины менее $\frac{3}{5}$. Значит, его распилили не менее чем на $4 : \frac{3}{5} = \frac{20}{3}$ брёвнышек, т.е. хотя бы на 7.

Аналогично бревно длины 5 распилят не менее чем на 9 брёвнышек. Таким образом, суммарное число брёвнышек будет не меньше, чем $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$, что и требовалось доказать.

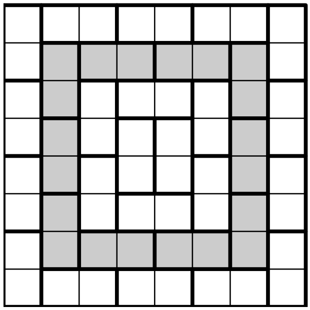
Теперь приведем пример, показывающий, что 25 брёвнышек получиться действительно может (длины указаны в метрах).

$$1; \quad \frac{2}{3} + 0,01, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - 0,01; \quad \frac{3}{5} + 0,02, \frac{3}{5} + 0,01, \frac{3}{5}; \frac{3}{5} - 0,01, \frac{3}{5} - 0,02;$$
$$\frac{4}{7} + 0,003, \frac{4}{7} + 0,002, \frac{4}{7} + 0,001, \frac{4}{7}, \frac{4}{7} - 0,001, \frac{4}{7} - 0,002, \frac{4}{7} - 0,003;$$
$$\frac{5}{9} + 0,004, \ldots, \frac{5}{9}, \ldots, \frac{5}{9} - 0,004.$$

7. Ответ: Да, можно.

Разобьем клетки на пары так, как показано на рисунке. Разбиение на пары состоит из четырех вложенных "рамок" (одна из которых выделена на рисунке более темным цветом).

Докажем, что такое разбиение удовлетворяет условию. Пусть это не так, то есть существует контур, который не содержит ни одну пару. Рассмотрим самую внешнюю "рамку", которую задевает этот контур.



Тогда в ней есть хотя бы две подряд идущие клетки из контура. Если их больше двух, то, по разбиению, среди них обязательно есть пара.

Если подряд идущих клеток контура, попадающих на внешнюю рамку, ровно две, то контур содержит соседние с ними клетки из следующей, более внутренней, "рамки" (так как более внешнюю "рамку" контур не пересекал). Более того, ни одна из этих двух клеток внешней рамки не является угловой, иначе контур проходил бы по обеим соседним с ней клеткам рамки и тем самым содержал бы хотя бы одну пару из выбранных нами. Но если эти две клетки из более внешней рамки не принадлежат одной паре, то соседние с ними клетки более внутренней рамки обязательно принадлежат одной паре, как видно из рисунка.

Таким образом, любой контур обязательно содержит какую-то выбранную пару.

8. Посмотрим на величины сторон прямоугольников — отрезки, на которые разбиваются нижняя и левая стороны квадрата. Количество этих отрезков равно 14, так как каждая линия разреза увеличивает это количество на 1, а если бы разрезов не было вообще, их было бы 2 — а именно сами нижняя и левая стороны. Сумма их длин равна $45 + 45 = 90$.

Предположим, что среди этих 14 отрезков есть хотя бы 13 различных. Тогда сумма их длин не меньше, чем $1 + 1 + 2 + 3 + ... + 13 = 92$. Но она должна равняться 90, то есть среди этих отрезков не более 12 различных.

Значит, среди этих величин должно быть не менее двух пар равных.

Если на одной стороне есть одинаковые отрезки, то соответствующие им столбцы (или строки) состоят из одинаковых прямоугольников.

Пусть все отрезки на каждой стороне разные. Возьмём две пары равных отрезков, их длины x и y. Тогда на каждой стороне есть один отрезок длины x и один отрезок длины y. Пересечение строки, соответствующей отрезку x, со столбцом, соответствующем отрезку y, это прямоугольник $x \times y$. А пересечение строки, соответствующей отрезку y, со столбцом, соответствующем отрезку x, это прямоугольник $y \times x$. Это искомая пара равных прямоугольников.

9. Ответ: существует способ начального распределения карточек, при котором эта игра могла продолжаться неограниченно долго.

Заметим, что число 111111 делится на 39. Раздадим первым тридцати девяти мальчикам последовательно от 1 до 39 карточек, а последнему тоже 39. Всего мы раздали $39 + (1 + 2 + \dots + 39) = 39 + 39 \cdot 20$ карточек, остальные делим поровну между первыми тридцатью девятью мальчиками.

Рассмотрим остатки при делении на 39 у наборов карточек, имеющихся у мальчиков.

Опишем свойство, которое будет сохраняться после каждого хода: есть ровно два мальчика, у которых остаток равен нулю, у всех остальных остатки разные, причем у только что раздавшего (кроме самого первого момента) ноль карточек, а у остальных тридцати девяти ребят карточек больше нуля.

Очередной ход всегда возможен: в первую минуту последний мальчик раздает всем по одной карточке, далее всегда есть мальчик с ненулевым количеством карточек, делящимся на 39.

У всех остальных, кроме раздающего карточки, остатки при делении на 39 различны, а так как он всем добавляет одинаковое количество карточек, то они остаются различными. У него самого остаток остаётся равным нулю, а после его хода появляется человек, который сделает следующий ход — тот, у которого до того остаток был равен 38.

Решения задач 8 класса

1. См. решение 2 задачи 7 класса.

2. Ответ: нельзя. Докажем от противного. Предположим, что так отметить точки можно. Заметим, что BC, CD, DE, EA делятся на 4, но $AB = 14$ дает остаток 2 при делении на 4. Тогда $AC = |AB \pm BC| = |14 \pm 16|$ так же дает остаток 2 при делении на 4. Аналогично $AD = |AB \pm BC \pm CD|$ и $AE = |AB \pm BC \pm CD \pm DE|$ дают остаток 2 при делении на 4. Но в то же время $AE = 16$. Пришли к противоречию, следовательно, так отметить точки нельзя.

3. См. решение 6 задачи 7 класса.

4. Нет, не является, так как $2^6 + 2^5 7^3 + 2^4 7^3 + 2^3 7^6 + 2^2 7^6 + 7^9 =$
$= 2^6 + 2^4 7^3 (2 + 1) + 2^2 7^6 (2 + 1) + 7^9 =$
$= 2^6 + 3 \cdot 2^4 7^3 + 3 \cdot 2^2 7^6 + 7^9 = (2^2 + 7^3)^3$

5. Сперва докажем, что в произведении, которое считает Хельга, встретится 90 чисел, кратных 5. Рассмотрим следующие группы чисел:

а) Числа вида $\overline{ab5}$, где $a \neq 5$. Вне зависимости от того, как Аскольд разрежет карточки с такими числами, на одном из обрывков останется число, делящееся на 5. Всего таких карточек $8 \cdot 9 = 72$.

b) Числа вида $\overline{55a}$, где $a \neq 5$. Как бы Аскольд ни резал такие карточки, на одном из обрывков снова обязательно останется число, кратное

5. Заметим, что такие карточки не входят в предыдущую группу. Их количество равно 8.

c) Числа вида $\overline{5a5}$, где $a \neq 5$. Эта группа так же даст нам 8 чисел, делящихся на 5.

d) Наконец, карточка с числом 555. При разрезании она даст нам еще 2 числа, кратных 5.

Итого, мы указали $72+8+8+2 = 90$ чисел, кратных 5. Значит, число Хельги делится на 5^{90}. Гораздо легче показать что оно делится на 2^{90} (мы оставляем эту проверку читателю). Следовательно, полученный Хельгой результат делится на 10^{90}, т.е. оканчивается по крайней мере на 90 нулей. Тогда девяностая с конца цифра равна 0.

6. Укажем стратегию для второго игрока, приводящую его к победе вне зависимости от того, как будет играть первый.

Не умаляя общности, будем считать, что скорпион подошел к третьей кучке. Предположим, что первый взял $a + b$ камней из первой кучки и положил a во вторую и b в третью. Тогда второму следует взять $a + b$ камней из второй кучки и положить a камней в первую и b в третью. Тогда после первой пары ходов в первой кучке стало $2007 - (a + b) + a = 2007 - b$ камней, а во второй — $2007 + a - (a + b) = 2007 - b$ камней. Таким образом, после хода второго игрока в первых двух кучках камней поровну. Поскольку количество камней в этих кучках уменьшается, когда-нибудь (не более, чем через 2007 пар ходов) в обеих кучках останется по 1 камню, т.е. первый игрок не сможет сделать ход и проиграет.

7. Заметим, что две исходных треугольных плитки не могут стыковаться по неравным сторонам. В самом деле, две стороны треугольников могут совпасть по суммарной длине с большей стороной третьего треугольника только в комибинации — два маленьких катета и гипотенуза, но так составленные плитки не образуют большого треугольника (рис. 1).

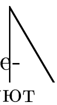


Рис. 1

Если неравные стороны стыковать с других комбинациях, тем более невозможно дорисовать третий так, чтобы они вместе образовали один большой треугольник — например, на рис. 2.

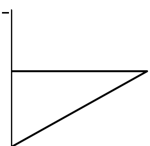


Рис. 2

Таким образом, треугольники стыкуются по равным частям.

Если два треугольника стыкуются по большим катетам, то третий трегольник можно присоединить к одному из этих либо по маленькому катету, либо по гипотенузе. Ни в том, ни в другом случае три треугольника один большой образовать не смогут (рис. 3, 4).

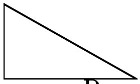


Рис. 3

Если треуголники стыкуются по меньшим катетам, то третий треугольник обязан соприкасаться с одним из наших по гипотенузе, в этом случае действительно все три треугольника образуют один внешний.

Рис. 4

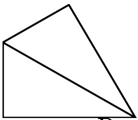


Рис. 5

Если два треугольника стыкуются по гипотенузе, то третий обязан стыковаться с одним из этих двух по какому-либо катету. Но случаи стыка по катетам мы уже разбирали, поэтому в этом варианте получится тот же внешний треугольник, что и в предыдущем.

Таким образом, из трех данных большой треугольник может быть составлен ровно одним способом, т.е. Вася был неправ.

8. Докажем следующее утверждение: для n карточек с целыми неотрицательными числами, дающими в сумме $n-2$, количество способов разбить их на два набора, в каждом из которых сумма чисел меньше их количества, не меньше $n-1$.

Доказательство проведем индукцией по n.

База для $n = 3$. Три целых неотрицательных числа в сумме дают 1, значит на одной из карточек написано число 1, а на двух других — нули. Мы эти нули будем писать с нижними индексами, т.к. карточки, на которых эти нули написаны, различны. Тогда легко указать два разбиения, удовлетворяющих условию (вертикальные черточки разделяют группы):

$$1, 0_1 \qquad \| \qquad 0_2$$

$$1, 0_2 \qquad \| \qquad 0_1$$

Переход от $n = k$ к $n = k + 1$. Раз сумма чисел равна $n - 2$, среди них есть хотя бы один нуль. Обозначим этот нуль через 0_1. Также найдется число, не меньшее 1. Обозначим его за x (соответствующую ему карточку обозначим за X). Уберем из нашего набора карточку 0_1 и уменьшим x на 1. К новому набору из k карточек с суммой чисел $k-2$ применимо индукционное предположение: для него можно указать $k-1$ разбиение, удовлетворяющее условию задачи.

С каждым из полученных разбиений проделаем следующую операцию: возьмем группу, в которой лежит карточка X. На этой карточке написано число $x-1$. Увеличим его на 1 и добавим в эту группу отложенную ранее карточку 0_1. Легко видеть, что новое разбиение уже исходного набора из $k+1$ карточки удовлетворяет условию задачи. Мы получаем $k-1$ разбиение вида

$$X, 0_1, \ldots \qquad \| \qquad \ldots$$

Заметим, что в правой группе обязательно есть карточка, на которой написано число 0. Поменяем эту карточку местами с 0_1. Получили еще одно разбиение, отличное от всех предыдущих. Всего k разбиений. Переход доказан.

Второе решение.

Увеличим числа на всех карточках на 1, так что теперь на каждой карточке написано натуральное число, и сумма всех чисел равна 2000. Теперь нам нужно доказать, что эти числа можно разбить на две группы по a и b чисел в каждой с суммами не более $2a-1$ и $2b-1$ соответственно.

Докажем следующее утверждение: для любого набора из n натуральных чисел, сумма которых равна $2n-2$, существует дерево, содержащее n вершин, для которого эти числа являются набором степеней вершин.

Доказательство проведем индукцией по n. База при $n=1$ очевидна. Проделаем индукционный переход. Пусть наше утверждение верно при n=k. Рассмотрим набор из k+1 натурального числа, сумма в котором равна 2k. Ясно, что в этом наборе есть хотя бы одно число, равное 1, т.к. в противном случае все числа были бы не меньше 2, а их сумма была бы не меньше 2k+2. Временно уберем карточку с числом 1 из набора. Рассмотрим любое другое число в наборе, большее 1 (такое по тем же соображениям найдется) и уменьшим его на 1. Получился новый набор, в котором k чисел, дающих в сумме $2k-2$, т.к. одну карточку с числом 1 мы из набора убрали и одно из чисел уменьшили на 1.

По индукционному предположению для нового набора существует дерево, содержащее k вершин и удовлетворяющее условию нашего утверждения. Выберем в нем вершину, соответствующую тому числу, которое мы уменьшали на 1 и прикрепим к ней одну висячую вершину. Получилось дерево, реализующее наш исходный набор из $k+1$ числа с суммой $2k$.

Теперь вернемся к задаче. По доказанному утверждению мы можем реализовать набор из 1001 числа с суммой 2000 как дерево, для которого эти числа являются набором степеней вершин. Удалим из этого дерева какое-нибуль ребро. Тогда граф распадется на два меньших дерева.

Пусть в первом из этих деревьев a вершин, а в другом — b. Первому дереву соответствует a карточек (только теперь на карточке, соответствующей вершине, в которую входило удаленное ребро, число на 1 больше степени этой вершины в новом дереве). Количество ребер на 1 меньше количества вершин, т.е. равно $a-1$. Сумма степеней вершин в этом дереве равна удвоенному количеству ребер, т.е $2a-2$. Откуда следует, что сумма чисел на соответствующих этому дереву карточках равна $2a-1$. Аналогично сумма чисел на карточках, соответствующих второму дереву, равна $2b-1$.

Таким образом, каждому ребру дерева (а точнее, двум поддеревьям, получающимся после удаления этого ребра), соответствует разбиение карточек, удовлетворяющее условию. Ясно, что разным ребрам соответствуют разные разбиения набора карточек. Значит, количество разбиений, удовлетворяющих условию, не меньше, чем количество ребер, т.е. $1001-1=1000$.

9. Ответ: $(n-1)^n$.

Рассмотрим какой-нибудь проект. Выделим в нем одну связную часть (компоненту связности) G. Попробуем ориентировать ребра в ней так, чтобы из каждой вершины выходило ровно по одному ребру.

Пусть в ней k городов. Тогда по условию в ней не более k дорог. Поскольку она связна, дорог не может быть меньше, чем в дереве с k вершинами, т.е. $k-1$. Значит, для данной компоненты связности есть два варианта: либо в ней k ребер, либо в ней $k-1$ ребро. Последний случай невозможен, т.к. иначе в сумме во всех компонентах количество дорог с одной стороны равно n, т.е. количеству вершин, а с другой стороны меньше количества вершин. Значит, в каждой компоненте количество веоршин равно количеству дорог.

Итак, пусть в нашей выделенной компоненте связности k вершин. Как мы выяснили, тогда в ней k дорог. В этом случае она не может являться деревом, т.е. в ней есть цикл. При удалении любого ребра из этого цикла G становится деревом, поэтому цикл ровно один, причем он не может самопересекаться. При уделении ребер этого цикла G распадается на несколько деревьев, поэтому на самом деле данная компонента связности имеет вид цикла, из некоторых вершин которого "растут деревья".

Сколькими способами можно ориентировать ребра в G так, чтобы из каждой вершины выходило ровно одно ребро? Ясно, что висящие деревья нужно ориентировать начиная в висячих вершинах (листьях) и двигаясь от листьев к корню. Другого способа ориентировать дерево просто нет. Когда мы ориентировали все висящие деревья, нам остается оринтировать цикл. Это можно сделать как по часовой стрелке, так и против. Если в цикле ровно две вершины (т.е. цикл представляет собой пару соединенных ровно двумя дорогами городов), то эти способы ничем не отличаются. В противном случае существует два способа ориентировать цикл и, как следствие, всю компоненту G.

Итак, мы приходим к выводу, что компоненту исходного графа (который соответствует стране), можно ориентировать двумя способами, если в ее основе лежит цикл длины больше, чем 2, и одним способом, если в основе компоненты находится пара соединенных двумя дорогами городов. Количество компонент последнего типа как раз равно количеству пар городов, соединенных двумя дорогами, поскольку ни в какой компоненте не может быть более одной пары таких городов. Т.е. количество компонент, которые можно ориентировать двумя способами, равно $x - y$ (количество всех компонент минус количество компонент, содержащих цикл длины 2). Тогда ужасность проекта, равная 2^{x-y}, есть в точности количество всех возможных способов ориентировать данный проект так, чтобы из каждой вершины выходило ровно одно ребро. Сумма ужасностей всех проектов в таком случае равна количеству способов построить ориентированный граф с n вершинами и n ребрами, в котором из каждой вершины выходит ровно по одному ребру, причем вершины этого графа различны (поскольку вершинам соответствуют города, а два города не могут быть одинаковыми).

Посчитаем это число. Из каждой вершины можно нарисовать стрелку в любую из оставшихся $n-1$ вершин. Всего вершин n, значит число способов выпустить из каждой вершины по стрелке равно $\underbrace{(n-1)\cdots(n-1)}_{n\text{ раз}} = (n-1)^n$.

Решения задач 9 класса

Сюжет 1

1. Ответ: 405. Если число увеличилось ровно в два раза, то количество разрядов увеличилось не более, чем на один. Следовательно, все цифры, кроме может быть одной, не более 4. А сумма цифр не может быть больше $99 \times 4 + 9 = 405$. Число $944\ldots4$ (99 четвёрок) преобразованием Акима увеличивается ровно в 2 раза.

2. Для доказательства будем рассматривать последнюю цифру.

Предположим, что такое число существует. Если оно заканчивается нулями, то аналогичное число без нулей на конце тоже увеличивается ровно в 19 раз (и при преобразовании Акима, и при умножении на 19 нули на конце сохраняются и на другие разряды не влияют).

Рассмотрим последнюю цифру нового числа (она не нуль). Она чётная, иначе умножение на 19 даёт нечётное число, а преобразование Акима — всегда чётное. Посмотрим на последнюю цифру числа, умноженного на 19, и последнюю цифру преобразования Акима:

исходное число	число $\times 19$	преобразование Акима
2	8	4
4	6	8
6	4	2
8	2	6

Таким образом, ни одна из цифр 2, 4, 6, 8 не может стоять на конце. Значит не существует такого числа, которое преобразованием Акима увеличивается в 19 раз.

3. Ответ: это числа $36 * **$ и $48 * **$, где $* * *$ означает произвольное количество нулей (или их отсутствие).

Можно было решить задачу, рассматривая цифры от конца, по аналогии с предыдущим пунктом. Приведем другое решение.

Рассмотрим число поразрядно. $X = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_i \dots a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_i 10^i + \dots + a_1 10 + a_0$ Преобразованием Акима из этого числа получается число $2a_n 10^{n+f(n)} + 2a_{n-1}10^{n-1+f(n-1)} + \dots + 2a_i 10^{i+f(i)} + \dots + 2a_1 10^{1+f(1)} + 2a_0 = A$, где за $f(i)$ обозначено количество цифр, бо́льших 4, среди a_0, a_1, … a_{i-1}, которое соответствует сдвигу данного разряда из-за переносов в младших разрядах.

Число, для которого $f(n) = 0$ (перенос может быть лишь в старшем разряде), увеличивается ровно в 2 раза. Число, для которого $f(n) \geq 2$, увеличивается более, чем в 100 раз, т.к.

$$A \geqslant 2a_n 10^{n+f(n)} \geqslant 10^{f(n)}(a_n + 1)10^n > 10^{f(n)}X$$

Следовательно, для нашего числа $f(n) = 1$. Ровно одна из цифр a_1, a_2, … a_{n-1} больше 4, пусть это $a_k > 4$. Тогда $f(1) = f(2) = \dots = f(k) = 0$, $f(k+1) = f(k+2) = \dots = f(n) = 1$ и преобразование Акима можно записать короче: $A = 2\overline{a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}}10^{k+2} + 2\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$ Распишем требование $A = 17X$:

$$2\overline{a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}}10^{k+2} + 2\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} = \\ = 17(\overline{a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}}10^{k+1} + \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0})$$

После алгебраических преобразований и сокращений получаем

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}}10^{k+1} = 5\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$$

Справа стоит число, меньше $5 \cdot 10^{k+1}$. Значит число $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_{k+1}}$ состоит из одной цифры ($k = n - 1$), не большей 4. Оно не может быть ни 1, ни 2, поскольку $a_k > 4$. Возможные варианты $a_n = 3$ и $a_n = 4$ приводят к двум сериям в ответе.

4. Ответ: этой цифрой может быть только нуль.

Будем говорить, что "цифра доминирует", если количество таких цифр больше половины всех цифр числа.

Покажем, что цифра нуль может доминировать. Пусть изначально было число $10^{2^{100}}$. После 100 преобразований Акима 2^{100} нулей останутся, а из 1 получится менее 2^{100} цифр (за одно преобразование количество ненулевых цифр увеличивается не более, чем в 2 раза). В итоговом числе нули доминируют.

Покажем, что другие цифры доминировать не могут. После первого преобразования Акима в числе могут быть только цифры 1, 2, 4, 6, 8 и 0. Причём с нулями ничего не происходит. Исключим из числа все нули. Без них доминировавшая ненулевая цифра останется доминирующей. Посмотрим, что происходит с остальными цифрами за 8 преобразований Акима.

1	6
2	12
4	24
8	48
16	816
212	16212
424	212424
848	424848
16816	84816816

Во фрагменте, получающемся из каждой цифры за 8 преобразований Акима ни одна цифра не доминирует. Для проверки составим таблицу (см. справа, после цифры 8 в левом столбце переходим к первой строке целиком). Для единицы рассмотрим девятую строку, для двойки — шестую строку (с переходом), и так далее..., для шестёрки — правый столбец девятой.

Разобьём конечное число на фрагменты, происходящие от каждой из цифр числа, полученного после 92 преобразований Акима. Никакая цифра не доминирует ни в одном из фрагментов, следовательно, не доминирует в числе.

Сюжет 2

1. Ответ: выигрывает Виталий.

Он может применить "симметричную стратегию". Первым ходом он обведёт центральную линию (между 500-ой и 501-ой клетками). А последующими ходами будет обводить линию, симметричную обведённой предыдущим ходом Глебом относительно центральной линии. После каждого хода Виталия позиция симметрична, а Глеб вынужден нарушать симметрию. Если у Глеба есть непроигрышный ход, то у Виталия тоже найдётся симметричный непроигрышный ход. Ходы Глеба когда-нибудь закончатся и он проиграет.

2. Ответ: выигрывает Глеб.

Для выигрыша ему достаточно обвести линию в 4 клетках от края на большей из частей, образовавшихся после хода Виталия. (Большая часть состоит хотя бы из 6 клеток, поэтому ход не проигрышный.)

К моменту окончания игры (когда нет непроигрышных ходов) полоска окажется разделена обведёнными линиями на куски из двух или трёх клеток одним из двух способов $11 = 2+2+2+2+3 = 2+3+3+3$ (порядок не важен). Поскольку Глеб сделал кусок из четырёх клеток, то в итоговом разбиении будет хотя бы два двухклеточных куска. Это означает, что реализуется первый вариант с пятью кусками в конце. Значит всего было сделано четыре хода и последний непроигрышный ход остался за Глебом.

3. Ответ: выигрывает Виталий.

Для выигрыша ему достаточно обвести линию вдоль короткой стороны в одной клетке от края. При любой дальнейшей игре (делается произвольный непроигрышный ход) до появления первой обведённой клетки будет сделано ровно два обведения длинной линии (соседние линии обводить уже нельзя и практически это игра на 1×7) и все оставшиеся 198 обведений короткой линии (т.к. не будет двух соседних обведённых длинных). Поэтому последний непроигрышный ход останется за Виталием.

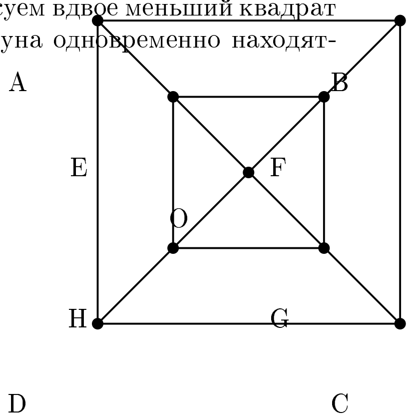
4. Ответ: выигрывает Глеб.

Для выигрыша он может обвести линию, соседнюю с обведённой Виталием на предыдущем ходу. В перпендикулярном направлении надо сыграть как на полоске 1×11, а на обведение параллельной линии отвечать обведением параллельной (их осталось 8, и потом будет оставаться чётное количество).

Сюжет 3

1. Доказательство. Когда первый бегун находится в вершине квадрата, второй находится на диагонали, кратчайшее расстояние до которой от этой вершины $\sqrt{2}/2$ км. Значит в этот момент расстояние между бегунами не менее $\sqrt{2}/2$ км.

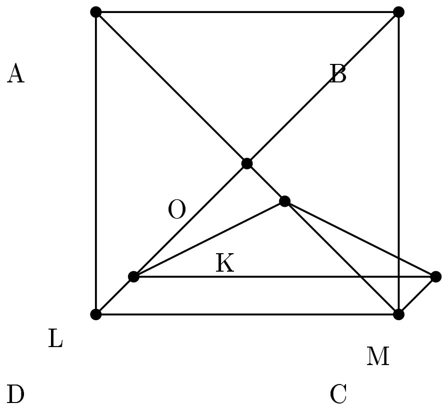
2. Внутри исходного квадрата $ABCD$ нарисуем вдвое меньший квадрат $EFGH$ с тем же центром O. Если оба бегуна одновременно находятся внутри квадрата $EFGH$, то расстояние между ними не более $1/2$ км — поскольку они находятся внутри одного из треугольников EOF, FOG, GOH, EOH, наибольшее расстояние в каждом из которых — длина гипотенузы, равная $1/2$ км.



Покажем, что найдётся момент, когда оба бегуна одновременно находятся внутри квадрата $EFGH$. Если в момент, когда первый бегун находится в точке E и бежит в сторону точки G, второй бегун находится вне квадрата $EFGH$, то через $\sqrt{2}/20$ ч, когда первый бегун добежит до точки G, второй бегун будет находится внутри квадрата $EFGH$.

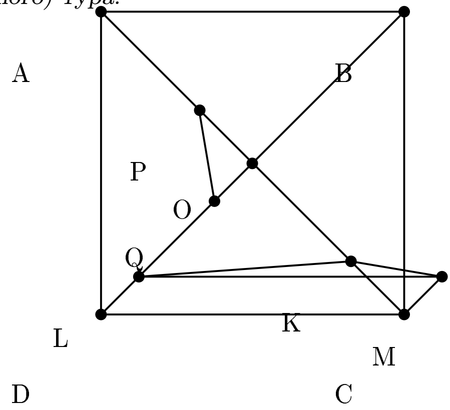
Это можно понять и из других соображений, если заметить, что бегуны проводят половину временим (по $\sqrt{2}/20$ ч.) внутри и вне $EFGH$.

3. Ответ: $1/2$ км.



В предыдущем пункте мы доказали, что минимальное расстояние не более $1/2$ км. Для доказательства ответа достаточно привести пример, когда минимальное расстояние равно $1/2$ км. Так будет в том случае, если один бегун начинает из центра, а другой из вершины квадрата $ABCD$. В этом случае все время, когда один бежит от центра к вершине, другой бежит от вершины к центру, и наоборот.

Пусть первый бегун отбежал от центра расстояние OK, тогда второй отбежал от вершины D (случай B симметричен) расстояние $DL = OK$. На луче CM, сонаправленном с DO выберем точку M так, что $CM = DL$. $CDLM$ — параллелограмм, т.к. DL и CM равны и параллельны по построению, следовательно, $LM = 1$ км. $\triangle OKL = \triangle CMK$ по двум катетам: $CM = DL = OK$ и $CK = OC - OK = OD - DL = OL$. Значит $KM = KL$. По неравенству треугольника $KM + KL \geq LM = 1$ км. Откуда $KL \geq 1/2$ км, т.е. расстояние между бегунами всегда не менее $1/2$ км.



4. Доказательство. Пусть в некоторый момент, когда бегуны находились в точках P и Q соответственно, расстояние между ними было $PQ < m$ м. Через $\sqrt{2}/20$ ч, когда они пробегут по половине диагонали, они будут находиться от вершин квадрата A или C первый, B или D второй на расстояниях, соответственно равных OP и OQ. Во всех случаях расстояние между бегунами в этот момент будет одинаковым. Для определённости будем считать, что они находятся соответственно в точках K и L, $CK = OP$, $DL = OQ$.

Как в предыдущем пункте, на луче CM, сонаправленном с DO, выберем точку M так, что $CM = DL$. $CDLM$ — параллелограмм, т.к. DL и CM равны и параллельны по построению, следовательно, $LM = 1$ км. $\triangle OPQ = \triangle CKM$ по двум катетам: $CK = OP$ и $CM = DL = OQ$. Значит $KM = PQ$. По неравенству треугольника $KM + KL \geq LM = 1$ км. Откуда расстояние между бегунами в этот момент $KL \geqslant 1\text{км} - KM = 1000\text{м} - PQ > (1000 - m)$ м. Заметим, что полученную оценку можно улучшить.

Решения задач 10–11 класса

Сюжет 1

1. Да, существуют. Например, $P(x) = Q(x) = x(1 - x^2)$ удовлетворяют условию, т.к. $\frac{\cos x(1-\cos^2 x)}{\sin x(1-\sin^2 x)} = \frac{\cos x \sin^2 x}{\sin x \cos^2 x} = \mathrm{tg} x$.

Примечание. Некоторые участники писали в качестве ответа такие функции как $1/x$, $\sqrt{1-x^2}$, которые, конечно, не являются многочленами.

2. Ответ: не существует. Допустим противное. Пусть $P(x)$ — такой многочлен, что $\sin x = P(\mathrm{tg} x)$. Заметим, что при $x \to \pi/2$ (предел односторонний, т.к. $x < \pi/2$) $\mathrm{tg} x \to +\infty$, а $\sin x \to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = 0$. Докажем, что таким свойством обладает только нулевой многочлен. Проведём доказательство индукцией по n, где n — степень многочлена P.

База $n = 0$ очевидна.

Переход. Пусть $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(a_k x^{k-1} + a_{k-1}x^{k-2} + \cdots + a_1) + a_0$. В скобках стоит ненулевой многочлен степени k, и его предел по индукционному предположению не равен нулю. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(a_k x^{k-1} + a_{k-1}x^{k-2} + \dots + a_1) = \infty$, а значит, и $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \infty$.

Итак, $P = 0$, следовательно, и $\sin x = 0$ на всём промежутке, что, очевидно, неверно.

3. Ответ: при нечётных n. Например, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin^{2n+1} x}{\cos x(1-\cos^2 x)^n}$.

Докажем, что подходят только нечётные степени. Пусть рассматриваемый интервал не $(0, \pi/2)$, а $(-\pi/2, \pi/2)$ (правомерность такого расширения интервала докажем ниже). Тогда

$$-\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(-x) = \frac{P(\sin(-x))}{Q(\cos(-x))} = \frac{P(-\sin x)}{Q(\cos x)},$$

откуда P является нечётной функцией (определённой на промежутке $(-1, 1)$).

Докажем, что в этом случае многочлен P не содержит одночленов с чётными степенями x. Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Вычтем из него одночлены $a_i x^i$ с нечётными i. Разность нечётных функций является нечётной функцией, но после такого вычитания многочлен является суммой одночленов $a_j x^j$, где j — чётное число, т.е. разность является чётной функцией. Следовательно, эта разность равна нулю, т.е. P содержит лишь одночлены с нечётными степенями x.

Докажем теперь правомерность расширения интервала. Известно, что при $x \in (0, \pi/2)$ выполнено равенство

$$\sin x Q(\cos x) = \cos x P(\sin x) \qquad (*)$$

(это равенство, очевидно, равносильно исходному). Докажем, что на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ уравнение (*) является тождеством.

Пусть $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $Q(x) = b_k x^k + \dots + b_1 x + b_0$. Тогда уравнение (*) переписывается в виде

$$\sin x(a_n \cos^n x + \dots + a_1 \cos x + a_0) = \cos x(b_k \sin^k x + \dots + b_1 \sin x + b_0).$$

Обе части являются непрерывными функциями от x и совпадают на интервале $(0, \pi/2)$. Устремив x к нулю, получим $b_0 = 0$ (левая часть стремится к нулю, а правая — к b_0). Аналогично, устремляя x к $\pi/2$, имеем $a_0 = 0$. Тогда мы можем разделить обе части равенства на $\sin x \cos x$:

$$a_n \cos^{n-1} x + \dots + a_1 = b_k \sin^{k-1} x + \dots + b_1.$$

Сделаем замену $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ (она правомерна на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$). Получим

$$a_n(1-\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} + \dots + a_1 = b_k \sin^{k-1} x + \dots + b_1.$$

Одночлены вида $a_i(1-\sin^2 x)^{\frac{i-1}{2}}$ с нечётными i перенесём в другую часть, а из всех одночленов такого же вида с чётными i вынесем множитель $\sqrt{1-\sin^2 x}$. Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем

$$\sqrt{1-\sin^2 x} S(\sin x) = T(\sin x),$$

где S и T — некоторые новые многочлены.

Докажем, что многочлены S и T равны нулю (и тогда искомое равенство (*) выполнено не только на интервале $(0, \pi/2)$, но и на всей вещественной прямой). Возводя в квадрат и подставляя $y = \sin x$, получим

$$(1-y^2)S^2(y) = T^2(y). \qquad (**)$$

Допустим, что $S \neq 0$ (и тогда $T \neq 0$). Пусть 1 — корень кратности l многочлена S и корень кратности r многочлена t. Тогда 1 — корень кратности $2r$ многочлена $T^2(y)$ и корень кратности $2l+1$ многочлена $(1-y^2)S^2(y)$, т.е. левая и правая части равенства (**) суть разные многочлены. Отсюда их разность $(1-y^2)S^2(y) - T^2(y)$ является ненулевым многочленом, и, следовательно, имеет конечное число корней. Но по условию равенство должно соблюдаться при $x \in (0, \pi/2)$, т.е. при $y \in (0,1)$. Противоречие.

4. Ответ: $n+1$ корень.

Перепишем уравнение $\sin x = P(\cos x)$ в виде $\sqrt{1-x^2} = P(x)$, $x \in (0,1)$.

Рассмотрим функцию $\sqrt{1-x^2} - P(x)$. По теореме Ролля между любыми двумя корнями этой функции найдётся корень производной, т.е. корень уравнения $(\sqrt{1-x^2})' = P'(x)$. Следовательно, из того что исходное уравнение имело m корней, следует, что уравнение $(\sqrt{1-x^2})^{(m-1)} = P^{(m-1)}(x)$ имеет хотя бы один корень (в предположении что функция $\sqrt{1-x^2}$ дифференцируема достаточное количество раз). Следовательно, для того чтобы доказать, что исходное уравнение имеет не более $n+1$ корня, достаточно доказать неразрешимость уравнения $(\sqrt{1-x^2})^{(m+1)} = 0$.

Докажем, что $(\sqrt{1-x^2})^{(k)}$ существует и отрицательна на промежутке $(0,1)$ (при $k>0$). Построим рекуррентно такие многочлены $Q_k(x)$, что

$$(\sqrt{1-x^2})^{(k)} = \frac{Q_k(x)}{(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}}.$$

Известно, что $Q_0 = 1$. Дифференцируя функцию $\frac{Q_k(x)}{(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}}}$, получим

$$(\sqrt{1-y^2})^{(k+1)} = \frac{Q'_k(x)(1-x^2)^{\frac{2k-1}{2}} + (2k-1)xQ_k(x)(1-x^2)^{\frac{2k-3}{2}}}{(1-x^2)^{2k-1}} = \\ = \frac{Q'_k(x)(1-x^2) + (2k-1)xQ_k(x)}{(1-x^2)^{\frac{2k+1}{2}}}.$$

Отсюда

$$Q_{k+1} = Q'_k(x)(1-x^2) + (2k-1)xQ_k(x).$$

В частности, $Q_0(x) = 1$, $Q_1(x) = -x$, $Q_2(x) = -1$, $Q_3(x) = -3x$, $Q_4(x) = -3-12x^2$, и т.д. Докажем, что все коэффициенты многочлена $Q_k(x)$ отрицательны (при $k \neq 0$). Обозначим за a_i^k коэффициент при x^i в многочлене $Q_k(x)$. Докажем по индукции, что $a_i^k \leq 0$. База: $Q_1(x) = -x$. Из рекуррентной формулы для $Q_k(x)$ получаем

$$a_i^{k+1} = a_{i+1}^k(i+1) - a_{i-1}^k(i-1) + (2k-1)a_{i-1}^k = a_{i+1}^k(i+1) + a_{i-1}^k(2k-i).$$

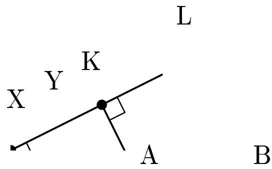
По индукционному предположению a_{i+1}^k и a_{i-1}^k отрицательны, а $i+1$ и $2k-i$ положительны (последний коэффициент положителен, т.к. степень $Q_k(x)$ не превосходит k). Следовательно, $a_i^{k+1} \leq 0$ (но не все равны нулю), откуда $Q_k(x)$ не имеет положительных корней. Отсюда следует неразрешимость уравнения $(\sqrt{1-x^2})^{(m+1)} = 0$. Таким образом, мы доказали, что исходное уравнение имеет не более $n+1$ корня.

Построим такой многочлен $P(x)$, что исходное уравнение имеет ровно $n+1$ корень. Представим этот многочлен в виде $P(x) = A(x-1/n)(x-2/n)\ldots(x-1)+\varepsilon$ и подберём такие $A<0$ и $0 \leq \varepsilon < 1$. Положим $\varepsilon = 0$ (в процессе решения его увеличим). У многочлена $P(x)$ n корней, следовательно, есть $n-1$ экстремум. Пусть значения многочлена $P(x)$ в этих экстремумах равно $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Зафиксируем такое значение A, чтобы $|y_k| > 1$, а также чтобы $|P(0)| > 1$. Таким образом, на любом промежутке монотонности многочлена $P(x)$ имеется хотя бы один корень уравнения $\sqrt{1-x^2} = P(x)$. Докажем, что на последнем промежутке монотонности многочлена существует два корня исходного уравнения. В силу равенства $P(1) = 0$ $x = 1$ является корнем (он выпадает из интервала $(0,1)$, но ниже, увеличив ε, мы его вернём в данный интервал). В точках, достаточно близкихк единице, значение $P(x)$ меньше значения $\sqrt{1-x^2}$ (в силу того, что производная последней функции стремится к бесконечности при $x \to 1-0$, а производная многочлена ограничена). Но в экстремуме, ближайшем к единице, значение многочлена больше.

Таким образом, на промежутке $(0,1]$ уравнение имеет $n+1$ корень. Теперь необходимо выбрать такое ε (“поднять график многочлена”), чтобы на интервале $(0,1)$ данное уравнение имело $n+1$ корня.

Выберем x из последнего промежутка монотонности такой, что $\sqrt{1-x^2} > P(x)$. Выберем теперь $\varepsilon < \sqrt{1-x^2} - P(x)$. Теперь исходное уравнение имеет $n+1$ корень на интервале $(0,1)$.

Сюжет 2



1. Опустим на прямую,содержащую отрезок ломаной, перпендикуляры из точек A и B в точки K и L соответственно. Возмём две точки X и Y на этой прямой, обе по другую сторону от K относительно L, X дальше от K, чем Y. Пусть мы передвинулись от X к Y. В треугольниках XYA и XYB углы XYA и XYB тупые, поэтому, когда мы передвигаемся от точки X к точке Y оба расстояния до точек A и B уменьшаются. Если же двигаться от точки Y к точке X, то оба расстяния уменьшатся. Поэтому точки X и Y одновременно не могут лежать на отрезке ломаной. Откуда очевидно, что ни одна из точек луча LK за точкой K не может лежать на отрезке ломаной. Аналогично, и с другой стороны от отрезка KL. Значит, весь отрезок ломаной полностью лежит между точками K и L, что и требовалось оказать.

2. Рассмотрим ломаную ACB максимальной длины. Опустим из точки B перпендикуляр на прямую AC. Пускай он упал в точку D. Очевидно, что точка C не может лежать на луче AD за точкой D, иначе при движении от точки D к точке C мы удаляемся от точки A. Лежать на луче DA за точкой A точка C, очевидно, тоже не может. Следовательно, она лежит на отрезке AD. Заметим, что ломаная ADB тоже удовлетворяет условиям (I) и (II). Если C не совпадает D, то, по неравеству треугольника, длина отрезка CB меньше, чем сумма длин отрезков CD и DB. Поэтому, если C не равно D, то длина ломаной ADB больше, чем ломаной ACB, что противоречит максимальности длины ломаной ACB. Поэтому точка C совпадает с D, то есть $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$, что означает, что точка C лежит на окружности, построенной на отрезке AB, как на диаметре. Обозначим длины отрезков AC и CB за а и с соответственно. По теореме Пифагора, $a^2 + c^2 = 1$. Докажем, что максимальная длина ломаной достигается, когда точка C лежит на середине дуги AB. В этом случае её длина будет равна $\sqrt{2}$. Покажем, что это не меньше, чем a + c.

$$0 \leqslant (a-c)^2 \implies 2ac \leqslant a^2 + c^2 \implies 2ac \leqslant 1 \implies$$
$$\implies a^2 + c^2 + 2ac \leqslant 2 \implies a + c \leqslant \sqrt{2}$$

Таким образом, длина максимальной ломаной равна $\sqrt{2}$.

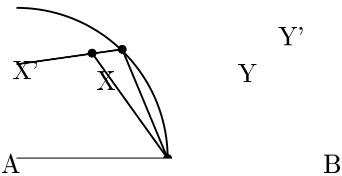
3. Ответ: 3/2.

Заметим, что у ломаной $AXYB$, удовлетворяющей условию сюжета, должны быть выполнены следующие свойства:

$$\angle AXB \geqslant \frac{\pi}{2}, \quad \angle AYB \geqslant \frac{\pi}{2}, \quad \angle AXY \geqslant \frac{\pi}{2}, \quad \angle XYB \geqslant \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

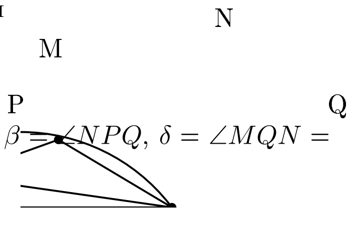
В этом легко убедиться от противного: при нарушении одного из этих свойств можно найти точки в окрестности вершины соответствующего угла, в которых, двигаясь по ломаной от A к B, мы будем удаляться от B или приближаться к A. Более того, эти свойства достаточны для трёхзвенной ломаной, чтобы были выполнены условия сюжета.

Рассмотрим сперва случай, когда точки X и Y лежат по одну сторону от прямой AB.



В силу свойств $(*)$ точки X и Y лежат в полукруге (возможно, на его границе), построенном на AB как на диаметре. Продлим прямую (XY) до пересечения с полуокружностью, и получим точки X' и Y' соответственно (см рисунок). В силу неравенства треугольника длина ломаной $AX'Y'B$ не уменьшилась, а поскольку точки X' и Y' лежат на полуокружности, свойства $(*)$ выполняются. Таким образом, не умаляя общности, считаем что точки X и Y лежат на полуокружности.

Пусть O — середина отрезка AB (и центр нашей полуокружности). Можем считать, что $\angle AOX \geqslant \angle XOY \geqslant \angle YOB$. Действительно, если хотя бы одно из этих неравенств нарушается, мы можем отразить точку X относительно биссектрисы $\angle AOY$ или точку Y относительно биссектрисы $\angle XOB$ — при этих действиях длина ломаной сохраняется, и интересующие нас свойства не нарушаются — и повторять эти действия до тех пор, пока центральные углы не будут упорядочены.



Воспользуемся следующим фактом: если на дуге PQ некоторой окружности есть точки M и N, причём $PM < QN$ (см рисунок), то $PM + MQ < PN + NQ$. Действительно, если обозначить углы: $\alpha = \angle PQM$, $\beta = \angle NPQ$, $\delta = \angle MQN =$

$\angle MPN$, то по теореме синусов имеем:

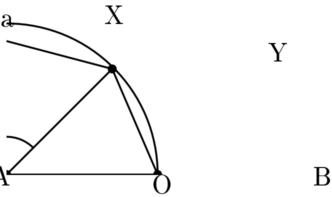
$$\begin{aligned}
&(PM + MQ) - (PN + NQ) = \\
&\qquad = 2R\bigl(\sin\alpha + \sin(\beta+\delta)\bigr) - 2R\bigl(\sin(\alpha+\delta) + \sin\beta\bigr) = \\
&\qquad = 2R\bigl(\sin\alpha - \sin(\alpha+\delta) + \sin(\beta+\delta) - \sin\beta\bigr) = \\
&\qquad = 2R\bigl(2\sin(-\delta/2)\cos(\alpha+\delta/2) + 2\sin(\delta/2)\cos(\beta+\delta/2)\bigr) = \\
&\qquad = 4R\sin(\delta/2)\bigl(\cos(\beta+\delta/2) - \cos(\alpha+\delta/2)\bigr) < 0
\end{aligned}$$

поскольку $\delta > 0$, а $\beta > \alpha$, в силу чего $\cos(\beta+\delta/2) < \cos(\alpha+\delta/2)$.

Вернемся к решению задачи.

Если $\angle XOY > \frac{\pi}{3}$, выберем точку Y' на дуге XB так что $\angle XOY' = \frac{\pi}{3}$. Тогда, в силу упорядоченности центральных углов и только что доказанного факта, имеем: $XY' + Y'B > XY + YB$, то есть замена точки Y на Y' увеличивает длину ломаной.

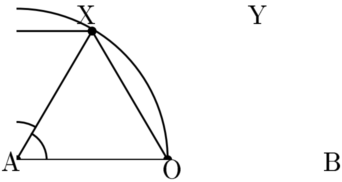
Если же $\angle XOY < \frac{\pi}{3}$, выберем точку X' на дуге AY так что $\angle X'OY = \frac{\pi}{3}$. Тогда аналогично имеем: $AX' + X'Y > AX + XY$, то есть замена точки X на X' увеличивает длину ломаной.



Итак, мы можем считать, что $\angle XOY = \frac{\pi}{3}$.

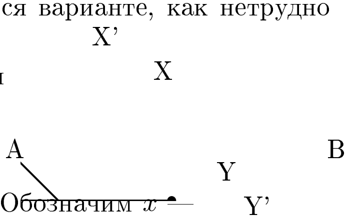
Теперь отразим точку X относительно биссектрисы $\angle AOY$ (длина ломаной при этом не изменится), и получим, что $\angle AOX = \frac{\pi}{3}$, а $\angle XOB = \frac{2\pi}{3}$.

Теперь, пользуясь тем же фактом, переместим точку Y в середину дуги XB (если она еще не там), длина ломаной снова увеличится. Получилось следующее положение точек A, X, Y, B: это “половина” правильного шестиугольника (см рисунок).



Таким образом, мы доказали, что если положения точек X и Y не совпадают с теми, которые у нас получились в конце, то длину ломаной можно увеличить с сохранением условий сюжета.

Длина ломаной в последнем получившемся варианте, как нетрудно вычислить, равна $3/2$.



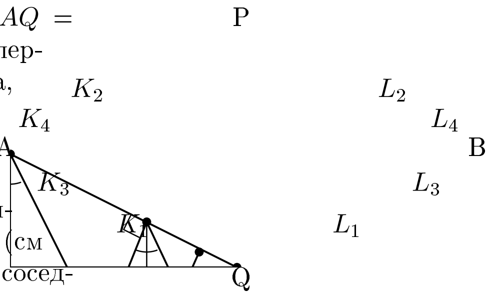
Рассмотрим теперь случай, когда точки X и Y лежат по разные стороны от прямой (AB). Здесь мы можем заменить положения точек на X' и Y' — такие, что $AX' \perp X'Y'$ и $X'Y' \perp Y'B$ (см рисунок). Обозначим x — расстояние от точки A до точки пересечения отрезка XY с прямой AB, а

$\alpha = \angle BAX'$. Тогда длина ломаной равна: $x \sin\alpha + x\cos\alpha + (1-x)\cos\alpha + (1-x)\sin\alpha = \sin\alpha + \cos\alpha$, что достигает максимума при $\alpha = \pi/4$, то есть максимальная длина ломаной в этом случае равна $\sqrt{2}$, что меньше максимума в предыдущем случае.

4. Ответ: да, длина ломаной с сохранением условий сюжета может быть сколь угодно большой.

Построим такую ломаную.

Пусть $APBQ$ — ромб, и $\angle PAQ = \alpha < \pi/2$. Из точки P опустим перпендикуляры на стороны ромба, получим точки K_1 и L_1, из них опустим перпендикуляры на ближайшие к ним стороны ромба, получим соответственно точки K_2 и L_2, и так далее (см рисунок). Ясно, что угол между соседними участками ломаной будет равен α, а угол между любым участком ломаной и отрезком AB будет равен $\frac{\pi-\alpha}{2}$. Сделаем таких построений достаточно много, чтобы при проектировании на отрезок AB покрыть больше половины его длины, а затем соединим K_n и L_n с точками A и B соответственно. Легко видеть, что для любых двух точек X и Y на этой ломаной, если X ближе к точке A "по пути на ломаной", то $\angle AXY \geqslant \frac{\pi}{2}$ и $\angle XYB \geqslant \frac{\pi}{2}$, то есть Y дальше по расстоянию на плоскости от A, чем X, и ближе к B, чем X.



Длина среднего участка построенной ломаной при проектировании на отрезок AB уменьшается в $\sin(\alpha/2)$ раз, поэтому длина этого участка не менее чем $\frac{1}{\sin(\alpha/2)}$, а выбирая α достаточно малым, это число можно сделать сколь угодно большим.

Сюжет 3

1. Допустим, что разность первой прогрессии не равна нулю. Тогда мы можем упорядочить по возрастанию члены этой прогрессии: $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Тогда $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_1 + a_4 < a_2 + a_4 < a_3 + a_4$, но эти пять различных чисел по условию должны быть членами второй четырёхчленной прогрессии, что невозможно.

2. Пусть первая прогрессия имеет вид $\{a_n\}$ (с разностью d_1), а вторая — $\{b_n\}(n \in \mathbb{Z})$ (с разностью d_2). Тогда $a_0 + a_1$ и $a_0 + a_2$ — члены второй прогрессии. Следовательно, их разность равна $kd_2 (k \in \mathbb{Z})$. С другой стороны, очевидно, их разность равна d_1. Итак, $d_1 = kd_2$. Поменяв прогрессии местами, получим $d_2 = k'd_1$. Отсюда $d_1 = d_2$.

3. Ответ: для рациональных x.

Пусть $x = a/b$. Пусть каждая прогрессия состоит из всех дробей (возможно, сократимых) со знаменателем b. Очевидно, такой пример подходит под условие задачи.

Докажем теперь, что x обязано быть рациональным.

Из предыдущего пункта нам известно, что разности прогрессий равны. Обозначим эту разность за d.

Докажем, что любой член прогрессии можно представить как сумму двух членов другой прогрессии. Пусть мы хотим получить b_i. Сложим a_0 и a_1. Получим некоторое число b_k. Если $i > k$, то $b_i = a_0 + a_{i-k+1}$, а если $i < k$, то $b_i = a_{k-i} + a_1$.

Представим x в виде суммы двух членов первой прогрессии, тогда $x = 4014 + nd$. Представим 2007 в виде суммы двух членов второй прогрессии: $2007 = 2x + md = 8028 + d(m + 2n)$. Отсюда $d = \frac{2007-8028}{m+2n}$, т.е. d рационально. Отсюда $x = 4014 + nd$ тоже рационально.

4. Пусть x — член первой прогрессии, d — ее разность, r — разность второй прогрессии. Тогда в первой прогрессии имеются числа $x - d$ и $x + d$, а значит, во второй прогрессии имеются числа $x^2, x(x - d) = x^2 - dx, x(x + d) = x^2 + dx, (x - d)(x + d) = x^2 - d^2$. Отсюда следует, что числа $dx = x^2 - (x^2 - dx)$ и $d^2 = x^2 - (x^2 - d^2)$ представимы в виде k_1r и k_2r соответственно, где k_1, k_2 – целые числа. Т.к. $d \neq 0$, то и $k_2r \neq 0$. Тогда число $x/d = dx/d^2 = k_1r/k_2r = k_1/k_2$ — рационально. Т.е. существует рациональное число q такое, что $x = qd$. Если $q = 0$, то $x = 0$ и x^3 — целое число. В противном случае рассмотрим число $q^4d^4 - q^2d^4 = x^4 - d^2x^2 = (x^2 + dx)(x^2 - dx)$, которое есть член первой прогрессии, как произведение двух членов второй прогресии. Поэтому $(q^4 - q^2)d^4 = x + kd = (q + k)d$ для некоторого целого k, откуда $d^3 = \frac{q+k}{q^4-q^2}$ — рационально, а значит и $x^3 = q^3d^3$ — рационально.

Все члены первой прогрессии имеют вид $(q+k)d$, где k — целое число, а их кубы имеют вид $(q + k)^3d^3$, т.е. все представимы в виде дробей с одним и тем же знаменателем (равным знаменателю дроби q^3d^3). То же верно и относительно второй прогрессии. Пусть тогда y – куб какого-то члена одной из прогрессий, имеющий максимальный знаменатель s среди знаменателей кубов обеих прогрессий. Тогда число y^2 является кубом члена другой прогрессии и имеет знаменатель s^2, следовательно (по выбору y) $s^2 \leq s$ и $s = 1$. Значит, все эти кубы являются целыми числами, что и требовалось доказать.