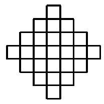
Олимпиада Юношеской Математической Школы 2006 г.
Задачи первого (заочного) тура
5–6 классы



1. На клетчатом листе бумаги нарисован квадрат пять на пять клеточек. Покажите, как его разрезать на 4 части так, чтобы из них можно было сложить фигурку, изображенную на рисунке. (Части можно поворачивать и переворачивать).

2. В психиатрической больнице есть главный врач и много сумасшедших. В течении недели каждый сумасшедший один раз в день кусал кого-нибудь (возможно и себя). В конце недели оказалось, что у каждого из больных по два укуса, а у главного врача — сто укусов. Сколько сумасшедших в больнице? Обоснуйте свой ответ.

3. К магу пришли четыре эльфа, чтобы назвать ему трехбуквенное заклинание. Три эльфа — светлые (они всегда говорят правду), а один — темный (он всегда лжет). Они сказали:

Элронд: Все буквы этого заклинания разные.
Келеберн: Первая буква — А.
Галадриэль: Вторая буква — Б.
Ундомиэль: Третья буква — В.
Элронд: Буквы расположены по алфавиту.

Кто из эльфов темный? Обоснуйте свой ответ.

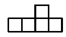
4. Номер автобусного билета — это шестизначное число. Билет называется счастливым по-торжковски, если в его номере сумма всех четных цифр равна сумме всех нечетных цифр (например, билет 992646 — счастливый). Приведите пример двух счастливых по-торжковски билетов с последовательными номерами.

5. У фокусника есть 10 карточек. Он готовит следующий фокус. Зритель называет число от 30 до 60, а фокусник показывает три карточки, сумма чисел на которых равна числу, названному зрителем. Помогите фокуснику — приведите числа, которые фокусник может написать на карточках, чтобы фокус удался.

6. В классе на доске были написаны числа сто чисел — 1, 2, . . . , 100. В этот класс по одному заходили люди. Если заходил ученик, то он стирал какое-нибудь число из написанных. Если учитель — то он дописывал сумму всех написанных в данный момент чисел. Когда в класс зашел директор, то он заметил, что произведение всех чисел на доске состоит из одних единиц. Докажите, что в этот момент на доске было написано не более 50 чисел.

7. На шахматной доске стоит 16 ладей. При этом они бьют все белые клетки. Докажите, что можно так убрать 8 ладей, чтобы оставшиеся по-прежнему били все белые клетки. (Ладья бьет все клетки, находящиеся с ней на одной вертикали или горизонтали.)

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2006 г.
Задачи первого (заочного) тура
7 класс

1. Покажите, как разрезать квадрат 10×10 клеточек на фигурки вида  (их можно поворачивать и переворачивать).

2. В кружке занимается 100 детей. Преподаватель выдал им 100 задач. После этого он заметил, что каждый ребенок решил ровно 1 задачу, при этом каждую задачу решил ровно 1 ребенок. После этого кружковцы стали общаться: любой ребенок может узнать у любого другого решения всех задач, которые тот на данный момент знает. Могут ли все дети узнать решения всех задач так, чтобы каждый спрашивал не более двух раз?

3. Встретились как-то шестеро Иных: четверо Светлых, которые всегда говорят правду, и двое Темных, которые всегда врут. Каждый из них, указав на кого-то другого, сказал, что тот Темный. Покажите, что после этого правдивый Инквизитор сможет определить хотя бы одного Темного.

4. В стране есть несколько городов, в каждом из которых расположена своя авиакомпания, которая содержит ровно две авиалинии из него в другие города страны. При этом любые два города соединены прямым авиарейсом. Сколько в стране может быть городов? Приведите все варианты и объсните, что других нет.

5. Эврисфей написал на доске 100-значное число, которое начиналось с 1 и заканчивалось не на 9. Он приказал Гераклу представить его в виде суммы трех чисел, каждое из которых записывалось только цифрами 3,4,5,6. Объясните, почему Гераклу удастся совершить этот подвиг.

6. Из клетчатого листка Гуля вырезала квадрат 100×100 клеток, а после покрасила некоторые его клетки в черный цвет. При этом оказалось, что каждая черная клетка граничит по стороне ровно с двумя другими покрашенными. Аня придумала 2005 способов выбрать из этого квадрата 3 черных клетки в ряд (по вертикали или горизонтали). Докажите, что еще хотя бы один способ она пропустила.

7. Есть 21 монета, среди них 1 фальшивая, она легче остальных. В городе живет 3 эксперта. Каждому из них утром можно дать две группы монет, чтобы он их взвесил (при этом в них должно быть равное количество монет). Вечером эксперт сообщает результат: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что два эксперта порядочные, а третий — лжец (он взвешивает то, что ему сказали, но сообщает неверный результат). Как найти фальшивую монету за 3 дня?

Решения олимпиады Вы можете с 10 по 13 октября (включительно) с 16.00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29.* Также Вы можете отправить свою работу по почте на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.*

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2006 г.
Задачи первого (заочного) тура
8 класс

Сюжет 1

На числовой оси отметили все квадраты натуральных чисел. Каждый из получившихся интервалов разбили на две половины, левую из которых (включая левый конец) покрасили в синий цвет, а правую (исключая правый конец)– в красный.

1. Докажите, что для любого натурального числа есть кратное ему синее.
2. Докажите, что для любого натурального числа есть кратное ему красное.
3. Найдутся ли 1000 различных натуральных чисел таких, что сумма любых пяти из них является красным числом?
4. Докажите, что существует бесконечно много степеней двойки красного цвета.

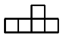
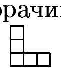
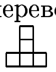
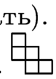
Сюжет 2

Есть несколько монет, среди них одна фальшивая, которая весит легче настоящих. В городе живут несколько экспертов. Каждому из них утром можно дать две группы монет, чтобы он их взвесил (при этом в них должно быть одинаковое количество монет). Вечером эксперт сообщает результат: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что часть экспертов — порядочные, а остальные — лжецы (они взвешивают то, что им сказали, но сообщают неверный результат).

1. Есть 4 монеты и один экперт. Как определить, врет ли эксперт?
2. Есть 6 монет и два эксперта, один из которых лжет, но какой именно, неизвестно. Как определить фальшивую монету за три дня?
3. Есть 35 монет и три эксперта, один из которых лжет, но какой именно, неизвестно. Как определить фальшивую монету за три дня?
4. Есть несколько (не менее 6) монет и три эксперта, один из которых лжет. Математик Саша знает, какая монета фальшивая и какой из экспертов лжет. За какое наименьшее количество дней Саша сможет объяснить Игорю, какая монета фальшивая? (Игорь знает, что ровно одна монета фальшивая, что она легче, и что есть ровно один лгущий эксперт.)

Сюжет 3

Покажите, как вырезать из прямоугольника 5×10 наибольшее количество фигурок, изображенных на рисунке (их можно поворачивать и переворачивать).

1.  2.  3.  4. 

В каждом пункте не забудьте обосновать, почему большее количество фигурок вырезать нельзя.

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2006 г.
Задачи первого (заочного) тура
11 класс

Сюжет 1

Вася и Игорь играют в следующую игру — Вася придумывает 101 ненулевое число, а Игорь составляет многочлен $a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + ... + a_1x + a_0$, где $a_0, \ldots, a_{100}$ — числа, которые назвал Вася (возможно переставленные).

1. Покажите, что Вася сможет добится того, чтобы у многочлена был хотя бы один вещественный корень.
2. Сможет ли Вася добится того, чтобы было хотя бы 2 вещественных корня?
3. Сможет ли Вася добится того, чтобы вещественных корней не было?
4. Вася назвал числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{101}$. Среди всех возможных многочленов Игорь выбрал тот, у которого минимум модуля на отрезке $[-1, 1]$ максимален. Какой многочлен выбрал Игорь?

Сюжет 2

В этом сюжете рассматривается выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и точка E на стороне BC такая, что площади удовлетворяют условию: $S_{AED} = S_{ABE} + S_{ECD}$.

1. Приведите пример четырехугольника, для которого существует более одной такой точки E.
2. Известно, что углы $\angle B$ и $\angle C$ прямые, а углы $\angle A$ и $\angle D$ не прямые. Докажите, что $BE{=}EC$.
3. Известно, что E лежит на биссектрисе углов $\angle A$ и $\angle D$. Докажите, что $AD = AB + CD$.
4. Известно, что $BE = EC$, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Сюжет 3

1. Дан треугольник. Докажите, что можно построить треугольник, длинами сторон которого являются синусы углов данного треугольника.
2. Докажите, что среди попарных произведений тангенсов углов остроугольного треугольника одно число не меньше 3, другое — не меньше 2, а оставшееся — не меньше 1.
3. Дан остроугольный треугольник, у которого косинус меньшего угла не больше 2/3. Докажите, что существует треугольник, у которого длины сторон равны котангенсам углов данного треугольника.
4. Известно, что существует треугольник, длины сторон которого равны тангенсам углов данного треугольника. Кроме того, существует треугольник, длины сторон которого равны котангенсам углов данного треугольника. Докажите, что все углы данного треугольника лежат в промежутке $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2006 г.
Задачи первого (заочного) тура
9–10 классы

Сюжет 1

На числовом луче отметили все квадраты натуральных чисел. Каждый из получившихся интервалов разбили на две половины, левую из которых (включая левый конец) покрасили в синий цвет, а правую (исключая правый конец) — в красный.

1. Верно ли, что из любых 6 различных натуральных чисел можно выбрать два, произведение которых — красное число?
2. Докажите, что для любого натурального числа есть кратное ему красное натуральное число.
3. Докажите, что любое натуральное число, большее 1, представимо в виде суммы двух синих натуральных чисел.
4. Докажите, что существует бесконечно много степеней двойки красного цвета.

Сюжет 2

Есть несколько монет, среди них одна фальшивая, которая весит легче настоящих. В городе живут несколько экспертов. Каждому из них утром можно дать две группы монет, чтобы он их взвесил (при этом в них должно быть одинаковое количество монет). Вечером эксперт сообщает результат: либо указывает, какая группа монет легче, либо говорит, что они весят одинаково. Проблема в том, что часть экспертов — порядочные, а остальные — лжецы (они взвешивают то, что им сказали, но сообщают неверный результат).

1. Есть 4 монеты и один экперт. Как определить, врет ли эксперт?
2. Есть 6 монет и два эксперта, один из которых лжет, но какой именно, неизвестно. Как определить фальшивую монету за три дня?
3. Есть 35 монет и три эксперта, один из которых лжет, но какой именно, неизвестно. Как определить фальшивую монету за три дня?
4. Есть несколько (не менее 6) монет и три эксперта, один из которых лжет. Математик Саша знает, какая монета фальшивая и какой из экспертов лжет. За какое наименьшее количество дней Саша сможет объяснить Игорю, какая монета фальшивая? (Игорь знает, что ровно одна монета фальшивая, что она легче, и что есть ровно один лгущий эксперт.)

Сюжет 3

В этом сюжете рассматривается выпуклый четырёхугольник $ABCD$ и точка E на стороне BC такая, что площади удовлетворяют условию: $S_{AED} = S_{ABE} + S_{ECD}$.

1. Приведите пример четырехугольника, для которого существует более одной такой точки E.
2. Известно, что углы $\angle B$ и $\angle C$ прямые, а углы $\angle A$ и $\angle D$ не прямые. Докажите, что $BE{=}EC$.
3. Известно, что E лежит на биссектрисе углов $\angle A$ и $\angle D$. Докажите, что $AD = AB + CD$.
4. Известно, что $BE = EC$, O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что $S_{AOD} = S_{BOC}$.

Решения олимпиады Вы можете с 10 по 13 октября (включительно) с 16.00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29.* Также Вы можете отправить свою работу по почте на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.*