Сюжет 1, 8 класс.

Заметим, что числа от n^2 до n^2+n для любого натурального n являются синими, а от n^2+n+1 до n^2+2n — красными.

1. Число n^2 делится на n и является синим.

2. Число $n^2+2n=n(n+2)$ делится на n и является красным.

Заметим, что в этой задаче возможно другое решение. Между числами n^2+n+1 и n^2+2n находится n последовательных чисел, а среди n последовательных чисел обязательно найдется число, делящееся на n.

3. Да, найдутся. Например, числа от 1620022251 до 1620023250. Сумма любых пяти из них больше либо равна сумме пяти наименьших (8100111265) и меньше либо равна сумме пяти наибольших (8100116240). Таким образом, все суммы по пять чисел находятся между $8100090001 = 90000^2+90000+1$ и $8100180000 = 90000^2+2\cdot 90000$, следовательно, являются красными.

4. Докажем от противного. Пусть 2^{2k+1} синяя, т.е.

$$m^2+1 \le 2^{2k+1} \le m^2+m \qquad (1)$$

единицу слева можно добавить, поскольку нечётная степень двойки не является точным квадратом. И пусть все (нас интересуют нечётные) высшие степени двойки синие. Тогда по индукции (база $j=0$ см.(1)) докажем, что

$$(2^j m)^2+1 \le 2^{2k+2j+1} \le (2^j m)^2+2^j m$$

Переход: из предположения $(2^{j+1}m)^2+1 \le 2^{2k+2(j+1)+1} \le (2^{j+1}m)^2+2\cdot 2^{j+1}m < (2^{j+1}m+1)^2$. По исходному предположению $2^{2k+2(j+1)+1}$ синяя, следовательно $2^{2k+2(j+1)+1} \le (2^{j+1}m)^2+2^{j+1}m$

С другой стороны, при $2^j > m$ из (1) имеем

$$2^{2k+2j+1} \ge (2^j m)^2+2^j\cdot 2^j > (2^j m)^2+2^j m$$

Что противоречит доказанному по индукции. Следовательно, существует бесконечно много степеней двойки красного цвета.

Сюжет 1, 9–10 класс.

1. Нет, можно привести контрпример. Рассмотрим шесть квадратов различных натуральных чисел. Тогда произведение любых двух из выбранных нами чисел тоже будет квадратом натурального числа ($a^2\cdot b^2=(a\cdot b)^2$), и потому - синим числом.

2. Пусть n – натуральное число, рассмотрим натуральное число $k=n^2+2n$. Заметим, что оно лежит в интервале между n^2 и $(n+1)^2$, середина которого – число $\frac{n^2+(n+1)^2}{2}=n^2+n+\frac{1}{2}$. Следовательно, число k – красное, кроме того, $k=n\cdot(n+2)$ делится на n.

3. Докажем сначала, что для любого натурального k среди чисел $1,2,\dots,k$ синих чисел больше. Действительно, в любом отрезке вида $[m^2,(m+1)^2-1]$ (где m – натуральное число) $m+1$ синее число $(m^2,m^2+1,\dots m^2+m)$ и m красных $(m^2+m+1,m^2+m+2,\dots m^2+2m)$. Следовательно, и в любом отрезке вида $[m^2,l]$, где $l<(m+1)^2$, синих чисел тоже больше.

Пусть n — натуральное число, большее 1. Заметим, что каждое из чисел $1,2,3,\dots,n-1$ входит ровно в одну пару натуральных чисел с суммой n. Если нет такой пары, состоящей из синих чисел, то в каждой паре есть хотя бы одно красное число, следовательно, тогда среди $1,2,3,\dots,n-1$ красных чисел было бы не меньше, чем синих чисел.

4. Докажем, что если число 2^{2k+1} – синее, то существует красная степень двойки, большая 2^{2k+1}. (Ясно, что из этого факта следует утверждение задачи). Предположим, напротив, что существует такое k, что все последующие степени двойки — синие.

Так как число 2^{2k+1} – синее, то его можно записать в виде $(n_k)^2+t$, где $t\leqslant n_k$. Докажем индукцией по m, что для любого такого k верно неравенство: $t\leqslant n_k(\frac{1}{2})^m$. База: для $m=0$ верно. Индукционный переход от m к $m+1$: рассмотрим число $2^{2k+3}=(2n_k)^2+4t\leqslant 4(n_k)^2+4n_k$. Так как число 2^{2k+3} – синее, причём $(2n_k)^2<2^{2k+3}<(2n_k+1)^2$, то по индукционному предположению верно неравенство $4t\leqslant(\frac{1}{2})^m 2n_k$, т.е. $t\leqslant n_k(\frac{1}{2})^{m+1}$.

Итак, $t\leqslant n_k(\frac{1}{2})^m$ для любого натурального числа m. Следовательно, $t=0$ и 2^{2k+1} – квадрат натурального числа. Это противоречие завершает доказательство требуемого утверждения.

Сюжет 2, 8–10 класс.

1. За шесть дней взвесим каждую монету с каждой. Если эксперт порядочный, среди результатов взвешиваний будут три монеты с попарно одинаковым весом. У лжеца такого исхода не будет, ибо среди трёх монет есть две настоящих, и лжец не может сказать, что они весят одинаково.

2. Разделим монеты на три группы по две монеты. В первый день дадим первому эксперту первую группу (чтобы он сравнил в ней две монеты), а второму — вторую. Во второй день первому эксперту дадим вторую группу, а второму — третью. Наконец, на третий день первый эксперт взвесит третью группу, а второй — первую. Так как фальшивая монета всего одна, то правдивый эксперт два раза скажет "равно", а лжец скажет "равно" не более одного раза. По этим признакам выявим правдивого эксперта. Та монета, которую он указал как легкую, будет фальшивая.

3. Разобьем монеты на семь кучек по пять монет. В первый день первый эксперт будет сравнивать первую пятерку со второй, второй эксперт — третью с четвертой, третий — пятую с шестой, седьмую пятерку отложим. На второй день поменяем экспертов: пусть второй теперь взвесит то, что вчера взвешивал первый, третий сегодня продублирует вчерашнюю экспертизу второго, а первый проконтролирует предыдущее взвешивание третьего.

Тогда результаты правдивых экспертов совпадут и будут отличаться от результатов лжеца; так мы выясним двух правдивых экспертов. Эти эксперты в совокупности взвесили шесть из семи пятерок монет (седьмая отложена). Следовательно, либо кто-то из них (может, оба) указал на более легкую кучку, либо фальшивая монета в отложенной пятерке. В любом случае мы узнаем, в какой пятерке фальшивая монета. После этого две монеты из этой пятерки даем одному правдивому эксперту, две — другому, а пятую монету откладываем. Либо один из экспертов укажет на фальшивую монету (ему можно верить), либо отложенная монета и есть фальшивая.

4. Покажем, как можно убедить Игоря за два дня. Для этого нужно взять фальшивую и настоящую монету и дать ее двум правдивым экспертам. Их показания совпадут, значит, им можно верить. При этом они укажут на фальшивую монету.

Докажем теперь, что за один день показать, какая монета фальшивая, не удастся. Поставим себя на место Игоря и рассмотрим все варианты взвешиваний, которые он мог увидеть.

а) Все три равенства. Любой из этих экспертов может быть лжецом.

б) Два равенства, одно неравенство. Неравенство мог показать лжец или на фальшивой и настоящей монете (сказав, что фальшивая тяжелее), или же на двух настоящих (при условии, что еще какие-то монеты не взвешиваются). Правдивый не мог показать единственное неравенство, так как это бы означало, что фальшивая монета у него, а у лжеца только настоящие монеты, и лжец тогда должен показать неравенство. Мы можем определить фальшивую монету, если все монеты участвуют во взвешивании (тогда лжец показал обратное неравенство). Но Саша, так распределяя монеты, не может гарантировать, что лжец покажет обратное неравенство, а не равенство.

в) Одно равенство, два неравенства. Кто-то из показавших неравенство лжет, но кто — опрределить невозможно.

г) Все три неравенства — невозможный случай.

Теперь рассмотрим случаи, когда один из экспертов ничего не взвешивает.

д) Два равенства. Лжецом может оказаться любой из них.

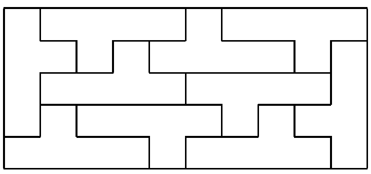
е) Одно равенство, одно неравенство. Лжецом может оказаться как эксперт, показавший неравенство, так и эксперт, не проводящий взвешивания.

ж) Два неравенства. Любой из них может оказаться лжецом.

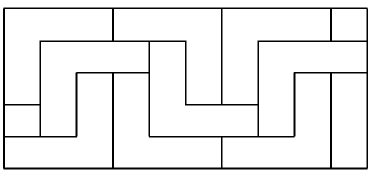
и) Пусть теперь только один эксперт что-либо взвешивает. Игорь может определить, правдивый ли эксперт, только если он взвешивает все монеты. Но тогда в каждой группе их не менее трех, и из группы фальшивую монету не выявить. Если же Игорь не определит, правдив ли взвешивающий эксперт, то и фальшивую монету определить невозможно.

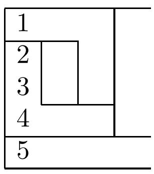
Сюжет 3, 8 класс.

1. Ответ: 10. Можно прямоугольник разрезать без остатка на такие пентамино.



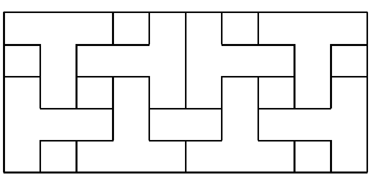
2. Ответ: 9.

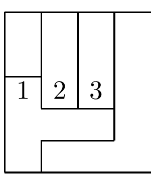




Покажем, что без остатка разрезать нельзя. Если клетки 1 и 2 принадлежат разным пентамино, тогда клетка 1 однозначно достраивается до пентамино, затем клетка 2 однозначно достраивается; и разрезать без остатка не удалось. Следовательно, клетки 1, 2, а значит и клетка 3, должны принадлежать одной пентамино. Аналогично, 5, 4, и 3 должны принадлежать одной пентамино. Но тогда две пентамино наложились. Таким образом, без остатка разрезеть нельзя, следовательно, получится не более 9 пентамино.

3. Ответ: 8.



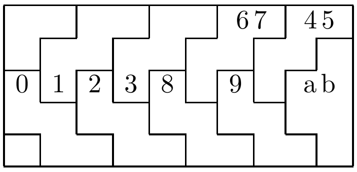


Из каждой T-пентамино выделим вертикальное тримино, оно имеет общую клетку с центральной горизонталью исходного прямоугольника.

Если какая-то T-пентамино имеет три общие клетки с центральной горизонталью, то помимо неё не более 7 T-пентамино, а всего не более 8. Рассмотрим случай при котором таких пентамино нет.

Покажем, что клетки 1, 2, 3 не могут принадлежать трём различным пентамино. С точность до симметрии «верх-низ» клетка 1 однозначно достраивается до T-пентамино. Теперь клетки 2, 3 однозначно достраиваются до вертикальных тримино, левое из них невозможно достроить до T-пентамино. Таким образом, одна из клеток 1, 2, 3 незаполнена. Аналогично, с другой стороны центральной горизонтали есть незаполненная клетка. Следовательно помещается не более 8 T-пентамино.

4. Ответ: 8.



Докажем, что больше восьми поместить нельзя. От противного: предположим, что можно поместить не менее девяти. Будем говорить, что каждое пентамино состоит из мономино и двух горизонтальных домино. Одна из этих фигур лежит на центральной горизонтали исходного прямоугольника. Если фигур не менее девяти, то помимо мономино на центральной горизонтали может находиться либо одно домино, либо одна незаполненная клетка, но не вместе. Следовательно, либо четыре правые, либо четыре левые клетка центральной диагонали являются мономино. Случаи симметричны, пусть 0, 1, 2, 3 — мономино. С точностью до симметрии «верх-низ» мономино 0 однозначно достраивается до пентамино. Теперь мономино 1, 2, 3 однозначно достраиваются до пентамино.

В оставшийся кусок должно поместиться десять горизонтальных домино, причем на центральной горизонтали не более одного. Значит, во-первых 4-5 и 6-7 — домино и они однозначно (в таком порядке) достраиваются до пентамино; во-вторых, a-b домино, поэтому 8 и 9 мономино, которые достраиваются однозначно. Теперь домино a-b не достраивается. Следовательно, пентамино не более восьми.

Сюжет 3, 9–10 класс.

1. Рассмотрим произвольный параллелограмм $ABCD$ и любую точку E на стороне BC. Проведём прямую, параллельную стороне AB, через точку E. Пусть E_1 – точка пересечения этой прямой со стороной AD. Тогда $ABEE_1$ и E_1ECD – параллелограммы, поэтому площади треугольников ABE и AEE_1 равны, также равны площади треугольников E_1ED и ECD. Следовательно, площадь треугольника AED равна сумме площадей треугольников ABE и ECD.

2. Так как $ABCD$ – трапеция с основаниями AB и CD, то её площадь равна $\frac{AB+CD}{2} \cdot BC$. Следовательно, если точка E удовлетворяет условию, то $\frac{AB+CD}{2} \cdot (BE+EC) = BE \cdot AB + CE \cdot CD$. Поэтому $BE \cdot (CD-AB) + CE \cdot (AB-CD) = (BE-CE) \cdot (CD-AB) = 0$. Так как по условию $ABCD$ – не прямоугольник, то длины сторон AB и CD различны, следовательно, $BE = CE$.

3. Опустим из точки E высоты на стороны AD, AB и CD. Так как E – пересечение биссектрисс углов ABD и ADC, то длины всех трёх высот равны друг другу. Пусть h – их длина. Тогда площадь треугольника AED равна $\frac{AD \cdot h}{2}$, площадь треугольника ABE равна $\frac{AB \cdot h}{2}$, площадь треугольника ECD равна $\frac{CD \cdot h}{2}$. Согласно условию получаем, что $AD = AB + CD$.

4. Заметим, что $AE\ --$ABC,DE – медиана в треугольнике BCD, поэтому треугольники ABE, ACE – равновеликие, треугольники DBE, DCE – равновеликие. Согласно условию получаем, что сумма площадей треугольников ACE и DBE равна площади треугольника AED. Кроме того, ясно, что сумма площадей ACE и DBE равна сумме площадей треугольника BOC и четырехугольника $AEDO$, а площадь AED равна сумме площадей треугольника AOD и четырехугольника $AEDO$. Итак, площади треугольников BOC и AOD равны.