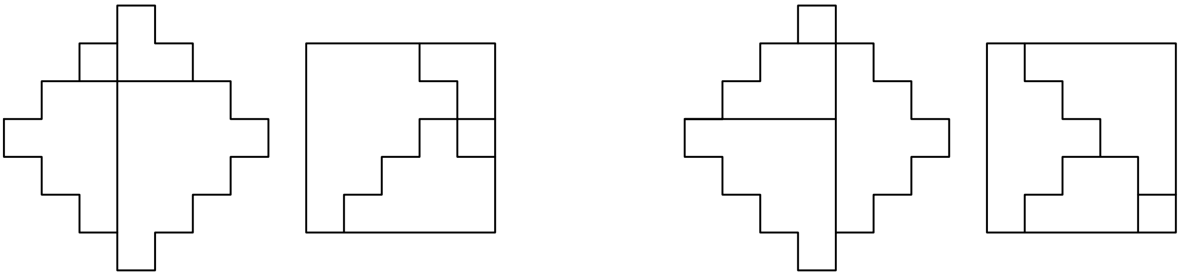
Решения заочного тура олимпиады Юношеской Математической Школы
2006–7 учебный год

Задача 1.

В этой задаче есть множество способов решения. Вот, например, два из них:



Задача 2.

Посчитаем, сколько было всего сделано укусов. Каждый сумасшедший кусал семь раз. Итого, укусов было в 7 раз больше, чем сумасшедших. При этом количество укусов, пришедшихся на самих сумасшедших в два раза больше их количества, так как каждый из них получил по 2 укуса. Тогда все остальные укусы пришлись на главного врача. Соответственно, их было в 5 раз больше, чем сумасшедших. С другой стороны, нам известно, что главного врача укусили 100 раз. Значит сумасшедших в 5 раз меньше, то есть $100 : 5 = 20$. Ответ: В больнице 20 сумасшедших.

Можно эту задачу решать с помощью уравнения. Оно составляется на основе тех же наблюдений: если сумасшедших было х, то укусов всего было $7x$ с одной стороны, а с другой стороны их было $2x + 100$, где $2x$ — укусы, полученные сумасшедшими, а 100 — врачём. Итого, $7x = 2x + 100$, то есть $5x = 100$, откуда $x = 20$.

Задача 3.

Предположим, что тёмный эльф — Элронд. Тогда остальные 3 эльфа должны были сказать правду. То есть заклинание было ”АБВ”. Но тогда несложно заметить, что Элронд оба раза сказал правду, что противоречит тому, что он тёмный эльф. Таким образом, мы выяснили, что Элронд — светлый. Значит все буквы заклинания разные и расположены по алфавиту.

Теперь допустим, что Келеберн — тёмный эльф. Это значит, что остальные эльфы — светлые и первая буква заклинания не ”А”, а вторая и третья: ”БВ”. Так как первая буква — не ”А”, она либо ”Б”, либо одна из следующих. Но в первом случае в заклинании будет две одинаковые буквы, что противоречит сказанному Элрондом. А во втором случае буквы в заклинании расположены не по алфавиту, что тоже не соответствует утверждению Элронда. То есть Келеберн не может быть тёмным эльфом.

Предположим теперь, что тёмный эльф — Галадриэль. Тогда первая и третья буквы заклинания — ”А” и ”В”, а вторая — не ”Б”. Но в этом случае вторая может быть ”А”, ”В” или одна из остальных. В первых двух случаях в заклинании окажется 2 одинаковые буквы, а в последнем буквы не будут в алфавитном порядке. И то, и другое противоречит сказанному Элрондом, светлым эльфом. Значит Галадриэль — светлый эльф.

Таким образом, если кто-то из эльфов и мог быть тёмным, то это Ундомиэль. Убедимся, что это возможно: предположим, заклинание было ”АБГ”. Тогда все буквы заклинания различны, расположены по алфавиту и первые две из них — ”А” и ”Б”. И при этом третья буква не ”В”.

Задача 4.

Всего есть несколько сотен различных правильных ответов в этой задаче. Один из них: 160049, 160050.

Искать ответ можно было следующим образом. Пусть некоторое число первое из пары в ответе. Пусть в нём при прибавлении единицы не происходит переноса разряда. Тогда последняя цифра в числе была чётная, то в новом числе сумма чётных цифр не увеличилась, а нечётных — увеличилась, то есть они не могли остаться равными. Значит в ответе на последнем месте стоит 9. При прибавлении 1 получается число, оканчивающееся на 0. Кроме этих двух цифр поменялись ещё некоторые. Предположим, что поменялась ещё только одна цифра — цифра десятков. Тогда, чтобы сохранились суммы чётных и нечётных цифр, нужноЮ чтобы в изначальном числе цифра десятков была чётная, а её сумма с ней же увеличенной на 1, была равна 9. Значит, это 4 и 5. Теперь уже можно подбором найти остальные цифры.

Задача 5.

В этой задаче, как и предыдущей, есть множество ответов. Более того, есть наборы всего из 8 карточек, удовлетворяющие условию. Например: 1, 2, 4, 7, 10, 13, 30, 45. Однако в условии требовалось найти набор из 10 карточек. Заметим, что если добавить к этому набору 2 произвольные, он по-прежнему будет удовлетворять всем условиям.

Довольно просто найти подходящий набор из десяти карточек можно следующим образом. Решим, что первая карточка из выбранных трех будет отвечать за десятки, а вторая и третья вместе за единицы. Тогда для подбора всех варинатов десятков нужно 4 карточки: 30, 40, 50, 60. Осталось еще 6 карточек, и на них нужно написать числа так, чтобы можно было двумя какими-то представить любое число от 0 до 9. Например, эти 6 чисел можно выбрать так: 0, 0, 1, 2, 4, 7.

Задача 6.

Поскольку произведение оставшихся в конце чисел состоит только из единиц, то оно заканчивается на единицу, и, стало быть, является нечётным. Таким образом, все оставшиеся на доске к приходу директора числа должны быть нечётными.

Сначала количество нечётных чисел в точности равно 50. Докажем, что если на каком-то шаге оно не больше 50, то и на следующем оно не может стать больше 50.

В самом деле, ученики никак не могут увеличивать количество нечётных чисел. Оно может увеличиваться только от действий учителя. Но сумма некоторого набора целых чисел будет нечётной тогда и только тогда, когда количество нечётных слагаемых является нечётным. Значит, учитель дописывает нечётное число только если до этого количество нечётных чисел на доске было нечётным. В этом случае оно было строго меньше 50-ти, и после действий учителя не может стать больше 50-ти.

Итак, количество нечётных чисел всегда не больше 50-ти, а к приходу директора четных чисел не осталось вообще.

Задача 7.

У нас имеется какая-то расстановка 16-ти ладей, причем все белые клетки доски находятся под боем (поле, на котором стоит ладья, тоже считается под боем этой ладьи). Покажем алгоритм выбрать из данной нам расстановки те 8 ладей, которые достаточно оставить.

Если на каждой вертикали шахматной доски стоит хотя бы по одной ладье, то можно на каждой вертикали одну выбирать и оставить, а остальные убрать.

Теперь займемся ситуаций, когда не на каждой вертикали есть хотя бы по одной ладье. Тогда белые клетки, расположенные на пустых вертикалях, не бьются по вертикали, следовательно, должны быть под боем по горизонтали. Значит в этой ситуации должно быть хотя бы по одной ладье на тех горизонталях, которые проходят через белые клетки пустых вертикалей.

Все вертикали делятся на две группы — в первой белые клетки имеют четные номера, если считать сверху, а во второй группе белые клетки имеют нечётные номера. Будем называть две вертикали "похожими", если они относятся к одной и той же группе (первой или второй, неважно), то есть на них расположение белых клеток одинаковое; и "непохожими", если они в разных группах, то есть расположение белых клеток противоположное.

Рассмотрим два варианта: 1) когда все пустые вертикали (то есть на которых нет вообще ладей) являются похожими, и 2) когда среди таких пустых вертикалей есть непохожие.

В первом варианте все белые клетки пустых вертикалей покрываются четырьмя горизонталями, и на каждой из этих горизонталей должно быть хотя бы по одной ладье. Выделим по одной ладье на этих горизонталях — их получится ровно 4 штуки. Ясно, что они держат под боем все белые клетки на вертикалях, похожих на пустую вертикаль.

Также, в этом варианте есть хотя бы по одной ладье на каждой вертикали, непохожей на пустые, а таких вертикалей тоже ровно четыре, и соответствующие 4 ладьи держат по боем все белые клетки на этих вертикалях, то есть все остальные белые клетки доски. Таким образом, в первом варианте можно выбрать 4 ладьи на указанных горизонталях и 4 ладьи на указанных вертикалях так, чтобы они вместе держали под боем все белые клетки доски. (Может оказаться, что некоторые из первой четверки совпадут с некоторыми из второй четверки, но тем лучше — меньше ладей можно оставить.)

Во втором варианте белые поля пустых вертикалей расположены на 8 разных горизонталях, поэтому хотя бы по одной ладье должно быть на всех 8 горизонталях. Выбрав на каждой из горизонталей по одной ладье, получаем нужный нам набор из восьми ладей.