Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
Решения задач первого (заочного) тура
8 класс

Сюжет 1.

1. Если квадрат 6×6 можно разрезать на k частей, то площадь квадрата должна делиться на k. Следовательно, могут подходить только числа 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Из последнего пункта сюжета будет следовать, что все эти числа подходят.

2. Допустим, что угловые противоположные клетки могут попасть в одну часть. Тогда в каждой из четырёх одинаковых частей найдётся пара клеток, отстоящих друг от друга на 8 клеток по горизонтали и на 8 клеток по вертикали. Но таких пар клеток в квадрате всего две, а по нашему предположению должно быть не менее четырех. Противоречие.

3. Рассмотрим периметр каждой части. Докажем, что он не может быть больше 34 клеток (17 см). Каждая клетка имеет периметр 2 см, следовательно, 16 клеток, находящихся в одной части, будут иметь периметр 32 см. Начнём клеить из клеток часть. Приклеивая каждую следующую клетку к части (начиная со второй), мы уменьшаем суммарный периметр как минимум на 1 см. Следовательно, склеив часть из 16 клеток, мы получим периметр не более $32 - 15 = 17$ см.

Теперь сосчитаем наибольшую длину разреза. Суммарный периметр четырёх частей не превосходит $17 \cdot 4 = 68$ см. Из них 16 см приходится на периметр самого квадрата, остальные 52 см — на разрезы. Но, разрезая сторону клетки, мы увеличиваем периметр на 2 клетки (1 см). Следовательно, длина разреза не будет превосходить 26 см.

4. Обязательно. Если kn делится на x, то x можно разложить в произведение двух таких чисел (назовём их a и b), что kделится на a, n делится на b. Тогда сторону k разделим на a равных частей, а сторону n — на b равных частей. Проводя соответствующие прямые, разрежем наш прямоугольник на прямоугольники $a \times b$. Площадь каждого из них в точности x.

Сюжет 2

1. Из сказанного следует, что у Андрея, Бориса, Виктора и Геннадия вместе содержатся все крести, пики, червы, а также бубновая дама, т.е. всего не менее $3 \cdot 9 + 1 = 28$ карт. Но у каждого по 7 карт, т.е. у вышеперечисленных четверых игроков всего 28 карт. Следовательно, Дмитрий знает все карты остальных (вместе взятые). Следовательно, отложенная карта — бубновая, не дама и та, которой у Дмитрия нет.

2. Допустим противное, т.е. у каждого на руках не менее двух мастей. Соединим линией игроков, если у них есть общая масть. Тогда каждый игрок соединён с остальными не менее чем двумя линиями, для этого потребуется не менее пяти линий. Но линий всего 4 (по числу мастей). Противоречие.

3. Так как у каждого по 7 карт, то сумма всех чисел на карточках одного игрока равна 7. Следовательно, хотя бы на двух карточках каждый игрок должен написать нули. Таким образом, нулей в совокупности не менее 10. Значит, нечетных чисел не более 35.

Приведём пример того, что 35 чисел могут быть нечётными. Пусть отложен крестовый туз, у Андрея крестовые 6, 7, 8, 9, 10, валет и дама; у Бориса — пиковые 6, 7, 8, 9, 10, король и туз; у Виктора — червовые 6, 7, 8, валет, дама, король, туз; у Геннадия — бубновые 6, 9, 10, валет, дама, король, туз; остальные карты — у Дмитрия. Тогда каждый написал по семь единиц и два нуля, т.е. всего 35 чисел оказались нечётными.

4. Пусть отложенная карта не является шестёркой. Тогда при любом раскладе карт один из игроков видит одновременно червовую и бубновую шестёрки. Зная, что отложенная карта не крестовая и не пиковая, этот игрок однозначно делает вывод, что отложенная карта не может быть и шестёркой, о чём и заявляет. Аналогично игроки заявляют и про другие достоинства, пока не останется одно достоинство (пусть это будет туз). Тогда человек, имеющий на руках оставшегося красного туза, узнает отложенную карту.

Сюжет 3.

1. Из условия следует, что борьба проходит по турам (некоторые участники автоматически проходят в следующий тур), причём каждый тур занимает ровно день. То есть один человек не может бороться более одного раза в день.

Если изначально было n борцов, то необходимо провести $n-1$ бой между ними (с каждым боем выбывает один борец, а нужно определить победителя).

В последний день происходит финал, т.е. все ковры, кроме одного, остаются свободными. В предпоследний — полуфинал (заняты два ковра).

Из вышеизложенного следует, что всего требуется провести 12 боёв, причём финальный бой проводится в отдельный день. Остальные 11 боёв укладываются не менее чем в три дня (иначе не хватит ковров). Итого требуется не менее четырёх дней.

Четырёх дней заведомо хватит: в первый день бьются 5 пар участников, во второй — пара победителей друг с другом, и ещё три победителя — с тремя не бившимися в первый день (один ковёр свободен), в третий проходит полуфинал, четвёртый день финальный.

2. Из сказанного выше следует, что необходимо провести 15 боёв, причём последние два дня будут занимать два полуфинальных и один финальный бои. Оставшиеся 12 боёв уложатся в 4 дня. Итого 6 дней.

Пример такого турнира: в первые 4 дня из оставшихся борцов выбираются три пары и проводится между ними три боя; оставшиеся два дня расписаны выше.

3. Исключая два последних дня, необходимо провести 61 бой. Для этого потребуется не менее 13 дней. Итого 15 дней. Пример проведения турнира за 15 дней строится аналогично.

4. В условии этого пункта не сказано, что необходимо, если есть такая возможность, задействовать все ковры. Задействуем лишь один ковёр, на котором и будем проводить все бои по следующему правилу: бой проводится между двумя борцами, отдыхающими дольше всех. В этом случае требование задачи соблюдается.