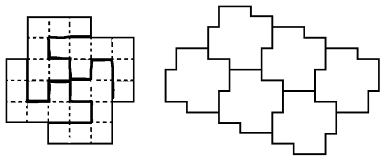
Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
Решения задач первого (заочного) тура
7 класс

1. Сначала составим из четырех таких фигурок блок (см. рис), а затем накроем квадрат такими блоками. Достаточно было привести какой-нибудь рисунок. За несколько вариантов баллы не добавлялись.



2. Да, могло: $12345679 * 8 = 98765432$. Достаточно было привести этот вариант.

3. Поскольку мальчики сказали, что отложенная карта не может быть крестовой, пиковой, червовой и дамой, не зная при этом карт Дмитрия, то все крести, пики, червы и дама находятся у них на руках. Здесь перечислено 9×3(масти)$+1$(бубновая дама)$= 28$. Из оставшихся 8 карт 7 на руках у Дмитрия, а 1 — отложенная. Следовательно, он знает все карты, кроме отложенной, а значит, и ее.

4. Как известно $2^k = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1 + 1$. Следовательно, последнее написанное число 2^{27} больше суммы всех остальных написанных чисел. Таким образом, самая большая сумма на 1-ом двойном листе, на котором написано 2^{27}.

5. Напишем на каждом столбике число 0. Затем рассмотрим каждый из 32 загонов и прибавим по единице к тем столбикам, к которым он примыкает. Так как каждый загон примыкает к шести столбикам, то всего мы прибавим $6 \times 32 = 192$ единицы. Но к каждому столбику примыкает столько загонов, сколько раз мы прибавляли к нему по единице, а значит и сумма написанных на столбиках чисел равна 192.

6. Обозначим за $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ количество грибов, собранных детьми (причем $x_1 < x_2 < \cdots < x_{20}$). Тогда $3(x_1 + \cdots + x_7) > x_1 + ...x_{20}$, отсюда $2(x_1 + \cdots + x_7) > x_8 + \cdots + x_{20} = x_1 + x_8 + \cdots + x_{20} - x_1 \geqslant x_1 + x_2 + 6 + x_3 + 6 + \cdots + x_7 + 6 + x_1 + 13 + x_2 + 13 + \cdots + x_7 + 13 - x_1 = 2(x_1 + \cdots + x_7) + 6 \times 6 + 13 \times 7 - x_1$. Следовательно, $x_1 > 36 + 91 = 127$. При $x_1 = 128$ сумма минимальна, если $x_2 = 129, x_3 = 130, \ldots, x_{20} = 147$. Эта сумма равна $128 + 129 + \cdots + 147 = 2750$. У семерых детей, собравших наименьшее число грибов, в сумме получится больше трети от всего количества: $x_1 + \cdots + x_7 = 128 + 129 + \cdots + 134 = 917 > 2750/3$. Но если это условие выполняется для них, то тем более оно выполняется для любых других семерых детей. Таким образом наименьшее возможное количество собранных детьми грибов 2750.

7. Посчитаем количество единиц и двоек, необходимое для получения числа n. Оно равно сумме соответствующих количеств для $n-1$ и $n-2$. Заметим, что двоек требуется не меньше, чем единиц, так как если в операции участвует единица, то участвует и двойка. Тогда нам необходимо и достаточно, чтобы количество требуемых двоек не превышало 600. Найдем наибольшее n: $n = 3$ — 1 двойка; $n = 4$ — 2; $n = 5$ — 3; $n = 6$ — 5; $n = 7$ — 8; $n = 8$ — 13; $n = 9$ — 21; $n = 10$ — 34; $n = 11$ — 55; $n = 12$ — 89; $n = 13$ — 144; $n = 14$ — 233; $n = 15$ — 377; $n = 16$ — $610 > 600$. Следовательно, наибольшее число — 15.