Олимпиада Юношеской Математической Школы 2004 г.
Задачи первого (заочного) тура
5–6 классы

1. Выпишите семь натуральных чисел в ряд так, чтобы соседние числа отличались на единицу, а сумма всех чисел равнялась 35.
2. Из пятерых детей некоторые всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Серёжа сказал Никите, а потом Вите: “Ты правдивый парень.” После этого он сказал Саше, а затем Паше: “Ты лгун!” Кем (правдивым или лгуном) назвал бы остальных детей Паша?
3. Выложите из четырёх фигурок вида и двенадцати фигурок вида какой-либо прямоугольник.
4. Найдите все трёхзначные числа, у которых произведение цифр равно 36.
5. Винни-Пух, Пятачок и Сова решили подарить на день рождения Иа-Иа много воздушных шариков. Договорились, что Винни-Пух принесёт шариков в два раза меньше, чем Сова с Пятачком вместе; и что Сова принесет в три раза больше шариков, чем Пятачок. В итоге Иа-Иа подарили 20 шариков. Докажите, что не менее 4 шариков лопнуло по дороге.
6. Отметьте на плоскости пять точек и соедините каждую пару точек отрезком одного из трёх цветов так, чтобы среди десяти треугольников с вершинами в отмеченных точках у семи треугольников цвета всех трёх сторон были различны.
7. У Ослика есть красные, синие и жёлтые тряпочки — по 10 каждого цвета. Он может их выменивать: за четыре жёлтые получать пять синих, за две красные и три синие — четыре жёлтых, за три жёлтые и четыре синие — семь красных. Может ли Ослик добиться того, чтобы тряпочек каждого цвета у него стало больше десяти?

Решения олимпиады Вы можете по 4 октября (включительно) по рабочим дням недели с 16:00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29, каб. 49.* Также Вы можете отправить свою работу по почте на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.*

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2004 г.
Задачи первого (заочного) тура
7 класс

1. Хрюша хочет перемножить семь каких-нибудь различных натуральных чисел, чтобы их произведением был миллион. Удастся ли ему это сделать без ошибки?
2. Шестеро детей, среди которых есть идеально правдивые, а остальные — неисправимые лжецы, как-то высказали свои мнения друг о друге (каждый — о пяти других). Оказалось, что фраз “ты правдив” всё же больше, чем фраз “ты лжец”. Сколько среди них правдивых? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.
3. У соседей Иванова и Петрова было в совокупности 50 домашних животных: кошек и мышей. После того, как каждая кошка Иванова съела по мышке Петрова, а каждая кошка Петрова скушала по мышке Иванова, мышей у обоих хозяев вместе осталось 10. При этом у Иванова поголовье животных уменьшилось вдвое, а у Петрова осталось две трети. Сколько каких животных было у каждого?
4. Было по 2003 карточки с цифрами 1, 3, 7 и 9. Из них составили 4006 двузначных чисел (использовав каждую карточку по разу). Докажите, что хотя бы одно из этих чисел простое.
5. Каждая из клеток доски 8×8 покрашена в один из трёх цветов. Незнайка насчитал не менее 100 трёхклеточных уголков, содержащих клетки всех трёх цветов. Докажите, что он ошибся.
6. Есть 33 монеты, из которых одна фальшивая и весит легче настоящих, а все настоящие весят поровну. Имеются также двое двухчашечных весов. Весы ломаются, если одна чаша на них перевесит другую. Можно ли за 4 взвешивания определить фальшивую монету (возможно, поломав в итоге весы)?
7. В клетках доски 100×100 находятся числа 1, -1 и 0. Саша выбирает 10 строк, после чего Петя выбирает 10 столбцов. Получившиеся на пересечении 100 чисел складываются, и эту сумму Саша отдает Пете в рублях (или Петя Саше, если сумма отрицательна). Несмотря на незаурядный ум, Саша проиграл 80 рублей. Какая наименьшая сумма могла быть во всей таблице?

Решения олимпиады Вы можете по 4 октября (включительно) по рабочим дням недели с 16:00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29, каб. 49.* Также Вы можете отправить свою работу по почте на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.*

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2004 г.
Задачи первого (заочного) тура
8 класс

Сюжет 1

Несколько девочек стоят по кругу. У каждой в руках по мячику. По сигналу каждая девочка, у которой есть мячик, перекидывает его соседке: если к девочке прилетают два мячика, она ловит только один, а второй выбывает из игры.

1. Пусть было 98 девочек. Мог ли после нескольких перекидываний в игре остаться только один мячик?
2. Пусть было 99 девочек. Мог ли после нескольких перекидываний в игре остаться только один мячик?
3. Пусть было 100 девочек. Докажите, что могло случиться так, что после 50 перекидываний в игре осталось два мячика.
4. Пусть была 101 девочка. Какое наименьшее количество перекидываний необходимо, чтобы остались только два мячика?

Сюжет 2

На плоскости отмечены несколько точек и проведено несколько прямых так, что на каждой из проведённых прямых есть хотя бы три отмеченные точки.

1. Приведите пример, когда точек семь, а прямых — шесть.
2. Приведите пример, когда точек десять, а прямых — двенадцать.
3. Докажите, что если точек семь, то прямых не более шести.
4. Докажите, что если точек десять, то прямых не более тринадцати.

Сюжет 3

Калькулятор умеет преобразовывать число x на экране в $2x+1$ или в $3x+1$. Исходно на экране была единица. Числа, которые можно получить за одну или несколько операций, назовём достижимыми.

1. Докажите, что нет четырёх последовательных достижимых чисел.
2. Есть ли три последовательных достижимых числа?
3. Докажите, что существует бесконечно много таких чисел x, что и x достижимое, и $x+1$ — достижимое.
4. Известно, что a — достижимое число. Докажите, что существует достижимое число большее a и кратное a.

Решения олимпиады Вы можете по 4 октября (включительно) по рабочим дням недели с 16:00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29, каб. 49.* Также Вы можете отправить свою работу по почте на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.*

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2004 г.
Задачи первого (заочного) тура
9–10 классы

Сюжет 1

Витя и Костя по очереди заменяют буквы в слове “СМИРНОВ” на цифры (разным буквам должны соответствовать разные цифры). Начинает (и заканчивает) Витя, а целью Кости является помешать Вите во всех его начинаниях.

1. Какое максимальное число Витя сможет получить?
2. Сможет ли Витя добиться делимости на 4?
3. Докажите, что Витя сможет ходить так, чтобы у полученного числа было не менее 8 делителей.
4. Сможет ли Костя помешать Вите добиться делимости на 3?

Сюжет 2

1. Дана функция $f(x) = kx + b$ и число $c > 0$ такое, что $f(2) = c$, $f(4) = c^3$, $f(8) = c^2$. Найдите c.
2. Даны функции $f(x) = kx + l$ и $g(x) = px + q$, а также такие различные числа a, b и c, что $f(a) = g(b)$, $f(b) = g(c)$, $f(c) = g(a)$. Докажите, что $k = 0$.
3. Дана функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ и такие положительные числа k и l, что $f(k) = l$, $f(k^2) = l^3$, $f(k^3) = l^2$, $f(k^4) = l^4$. Найдите l.
4. Даны два квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ с положительными старшими коэффициентами и такие различные положительные числа a и b, что $f(a) = g(b)$, $f(b) = g(a)$, $f(1/a) = g(1/b)$, $f(1/b) = g(1/a)$. Доказать, что $ab = 1$.

Сюжет 3

Осью симметрии множества на плоскости называется такая прямая, что для всякой точки из этого множества точка, симметричная ей относительно этой прямой, также лежит в этом множестве.

1. Угол между двумя прямыми равен восьми градусам. Существует ли многоугольник, у которого каждая из этих прямых — ось симметрии?
2. AD — невыпуклый четырёхугольник. Известно, что каждый из треугольников ABC, ABD, ACD, BCD имеет ось симметрии. Докажите, что одна из них является осью симметрии всего четырехугольника.
3. Верно ли утверждение предыдущего пункта, если $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник?
4. Множество точек на плоскости имеет ровно 100 осей симметрии. Из какого наименьшего числа точек может состоять это множество?

Решения олимпиады Вы можете по 4 октября (включительно) по рабочим дням недели с 16:00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29, каб. 49.* Также Вы можете отправить свою работу по почте на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.*

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2004 г.
Задачи первого (заочного) тура
11 класс

Сюжет 1

Под трапецией понимается (плоский) четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет (т. е. параллелограмм не трапеция).

1. Существует ли 6-гранник, у которого все грани — трапеции?
2. Существует ли многогранник $ABCDEFGH$, у которого грани $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ и $DAEH$ — равнобокие трапеции, причём $AE = BF = CG \neq DH$?
3. У 6-гранника $ABCDEFGH$ все грани — трапеции. Верно ли, что среди них найдутся две параллельные?
4. У 6-гранника $ABCDEFGH$ все грани — равнобокие трапеции. Верно ли, что он вписанный?

Сюжет 2

Калькулятор умеет преобразовывать число x на экране в $2x + 1$ или в $3x + 1$. Исходно на экране была единица. Числа, которые можно получить за одну или несколько операций, назовём достижимыми.

1. Является ли достижимым число 11111?
2. Есть ли три последовательных достижимых числа?
3. Докажите, что существует бесконечно много таких чисел x, что и x достижимое, и $x + 1$ — достижимое.
4. Докажите, что чисел, достижимых ровно за 1000 ходов, никак не менее 2^{500}.

Сюжет 3

1. Существует ли такой многочлен f, что $f(f(x)) = x^4 + 2x^2 + 2$ при всех значениях x?
2. Существует ли такой квадратный трёхчлен f, что $f(-x)f(x) \leqslant (f(0))^2$ при всех значениях x?
3. Сколько существует таких многочленов f, что $f(f(x)) + 1 = (f(x))^2$ при любом x?
4. Многочлен f таков, что $f(x) + f(3 - x)$ — квадратный трёхчлен. Какой может быть степень многочлена f? Приведите все варианты и докажите, что других нет.

Решения олимпиады Вы можете по 4 октября (включительно) по рабочим дням недели с 16:00 до 19:00 сдать по адресу: *14 линия Васильевского острова, дом 29, каб. 49.* Также Вы можете отправить свою работу по почте на адрес: *198504, Ст. Петергоф, Университетский пр., д. 28, математико-механический факультет СПбГУ. ЮМШ.*